1.1 Angulos entre paralelas.

Líneas paralelas. Se llaman líneas paralelas las que se hallan en un mismo plano y no se intersectan por mas que se prolonguen.

Si una línea corta a un par de paralelas (*l* y *m*) entonces forma ángulos con éstas, los cuales mantienen la siguiente relación:

$\angle 1 = \angle 2$ y se llaman ángulos opuestos por el vértice
$\angle 1 = \angle 3$ y se llaman ángulos alternos internos
$\angle 1 = \angle 4$ y se llaman ángulos correspondientes

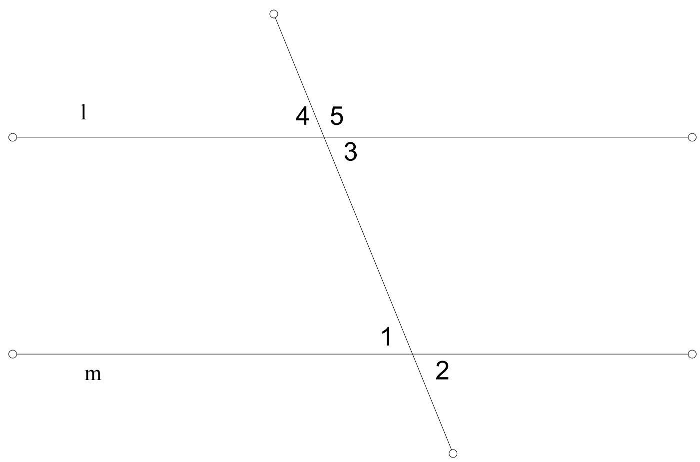

Figura 1

además, también tenemos que $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ y se dice que $\angle 4$ y $\angle 5$ son suplementarios. Aprovechando todo ésto podemos probar el siguiente:

Teorema .- La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

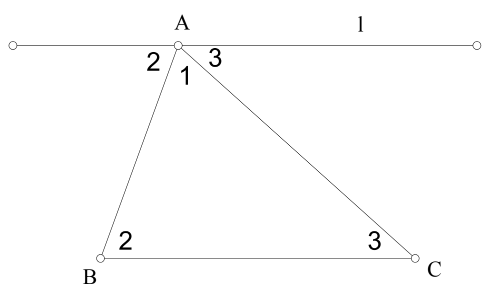

Figura 2

Demostración: Sea *l* una línea paralela a BC, la demostración es evidente al observar la figura 2, ya que $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Problemas

1.- Encontrar cuánto vale el ángulo exterior θ en la siguiente figura si son conocidos los ángulos α y β:

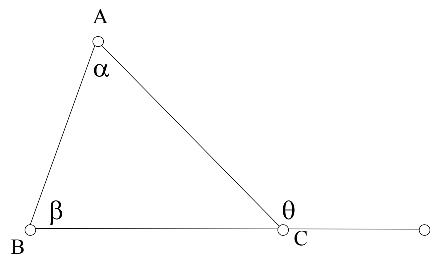

Figura 3

2.- Encontrar cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono de *n* lados.

1.2 Angulos en circunferencias

Existen distintos tipos de ángulos en las circunferencias, los cuales podemos calcular en función de los arcos que intersecten. La manera en que se calculan depende de si el vértice del ángulo se encuentra dentro, sobre ó fuera de la circunferencia. Veamos cada uno de ellos y la manera de calcularlos:

Un ***ángulo central*** es el que tiene su vértice en el centro de un círculo y su valor es igual al arco que intersecta medido en radianes.

$$\alpha = \text{arc}(AB)$$

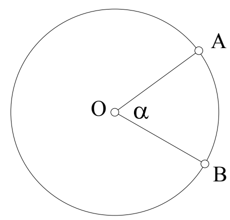

Figura 4

Un ***ángulo inscrito*** es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y su valor es igual a la mitad del arco que intersecta:

$$\beta = \frac{arc(AB)}{2}$$

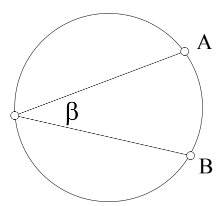

Figura 5

Un ***ángulo semiinscrito*** es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una línea tangente y una secante. Su valor es igual a la mitad del arco que intersecta:

$$\theta = \frac{arc(AB)}{2}$$

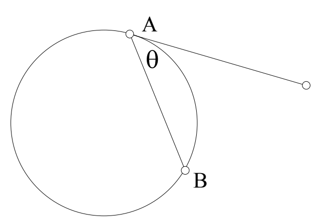

Figura 6

Ejemplo.- Demuestre que el valor de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que intersecta el mismo arco.

Solución:
Probemos ésto para el caso cuando uno de los lados del ángulo coincide con un diámetro:

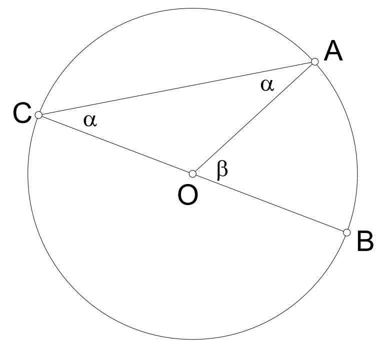

Figura 7

En la figura anterior sea CB un diámetro, sean ∠ACB = α (ángulo inscrito) y ∠AOB = β (ángulo central), queremos probar que α = β/2. Para ésto observemos que tanto OA como OC son radios de la circunferencia, por lo que el triángulo ΔAOC es isósceles, por lo tanto ∠ACO = ∠CAO = α. Y utilizando el resultado del ejercicio 1 de la sección 1.1, tenemos que ∠AOB = ∠ACO + ∠CAO = α + α = β, por lo tanto β=2α, lo cual queríamos demostrar.

Ahora faltaría demostrar lo anterior para las siguientes figuras, lo cual el lector puede probar fácilmente utilizando el caso que hemos probado.

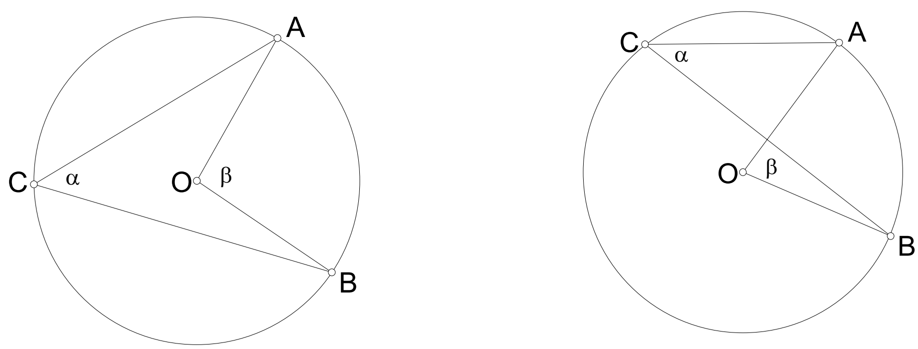

Figura 8

Teorema 1.- La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan dentro de un círculo es igual a la semisuma de los arcos que cortan dichas líneas.
Es decir

$$\alpha = \frac{arc(AB) + arc(CD)}{2}$$

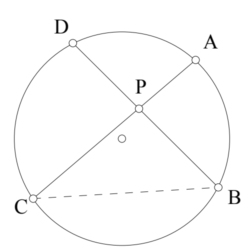

Figura 9

Demostración: Se traza el segmento CB, formándose así el triángulo PCB. Ahora como ∠DPC = ∠PCB + ∠PBC, entonces:

$$\angle DPC = \frac{arc(AB)}{2} + \frac{arc(CD)}{2}$$

Teorema 2.- La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan fuera de un círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que cortan dichas líneas.
Es decir

$$\alpha = \frac{arc(AB) - arc(CD)}{2}$$

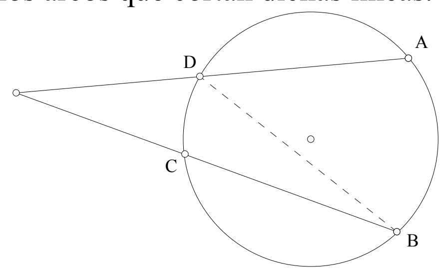

Figura 10

Demostración: Se traza el segmento DB, formándose así el triángulo PDB. Ahora como $\angle BDA = \angle DPB + \angle DBP$, despejando $\angle DPB = \angle BDA - \angle DBP$ entonces

$$\angle DPB = \frac{arc(AB)}{2} - \frac{arc(CD)}{2}$$

Problemas

1.- Demostrar que dos líneas paralelas cualesquiera que intersectan una circunferencia, cortan arcos iguales entre ellas.

2.- Demostrar que el valor de un ángulo semiinscrito es igual al valor de un angulo inscrito que intersecte el mismo arco.

3.- Demostrar que el radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

4.-Una circunferencia ha sido dividida arbitrariamente en cuatro partes, y los puntos medios de los arcos obtenidos se han unido con segmentos de rectas. Demostrar que entre éstos segmentos dos serán perpendiculares entre sí.

5.- En la siguiente figura PA y PB son tangentes a la circunferencia. Demostrar que PA = PB.

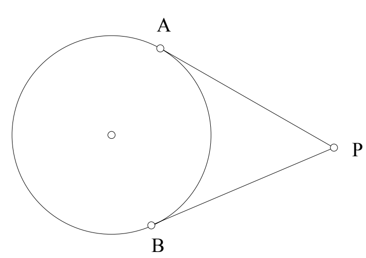

Figura 11

6.- Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestre que $\angle BAC = 90°$.

7.- A una circunferencia se le han trazado dos líneas tangentes paralelas las cuales la tocan en los puntos M y N. Se traza una tercer tangente la cual corta a las tangentes anteriores en los puntos K y L. Sea O el centro de la circunferencia. Pruebe que $\angle KOL = 90°$.

8.- Las circunferencias C_1 y C_2 se intersectan en los puntos A y B. Se traza una recta *l* que corta a C_1 en C y D, y a C_2 en M y N, de tal manera que A y B quedan en distintos lados de *l*. Pruebe que $\angle CAN + \angle MBD = 180°$.

9.- Pruebe que todo triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo.

10.- Pruebe que la razón entre la longitud del lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

1.3 Cuadriláteros cíclicos.

Un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una circunferencia se dice que es un ***cuadrilátero cíclico***.

Teorema.- Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que la suma de dos ángulos opuestos sea igual a 180°.

Demostración: Para probar esto, primero vamos a suponer que el cuadrilátero ABCD es cíclico. Tenemos que el $\angle DAB$ es equivalente a la mitad del arc(BD) y que el $\angle BCD$ es equivalente a la mitad del arc(DB), y como arc(BD) + arc(BD) = 360° (midiendo los ángulos en grados) tenemos que $\angle DAB + \angle BCD = \alpha + \beta = 180°$.

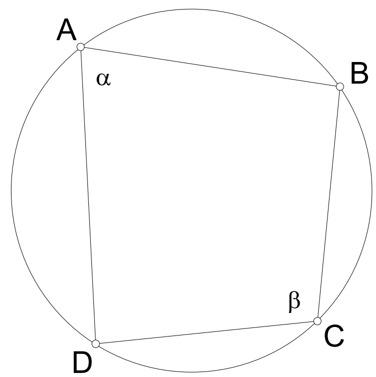

Figura 12

Ahora supongamos que $\angle DAB + \angle BCD = \alpha + \beta = 180°$. Tracemos la circunferencia circunscrita al triángulo ΔDAB y supongamos que ésta no pasa por el vértice C. Prolonguemos DC hasta que intersecte a la circunferencia en C′. Como el cuadrilátero ABC′D es cíclico tenemos que $\angle DAB + \angle BC'D = 180°$, esto quiere decir que $\angle BC'D = \angle BCD = \beta$ y entonces DC sería paralelo a DC′, lo cual es una contradicción ya que líneas paralelas no se intersectan. Entonces C coincide con C′ y por lo tanto el cuadrilátero ABCD es cíclico.

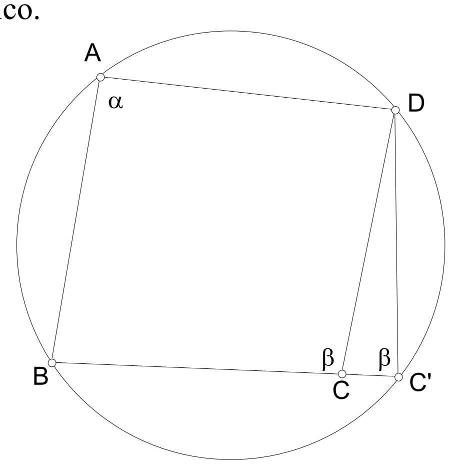

Figura 13

Ahora vamos a hacer un ejemplo donde utilicemos el anterior Teorema:

Ejemplo.- Las circunferencias C1 y C2 se intersectan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C1 y C2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersectan en el punto M. Demuestre que el cuadrilátero MCBD es cíclico.

Solución:
Queremos probar que $\angle CMD + \angle DBC = 180°$. Para ésto tracemos la cuerda común AB. Tenemos que $\angle MCA = \angle CBA = \alpha$ ya que uno es ángulo seminscrito y el otro es ángulo inscrito, ambos en la circunferencia C1. Análogamente se prueba que $\angle MDA = \angle DBA = \beta$ (en C2). Entonces, tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 180°$ por ser los ángulos internos del triángulo ΔMCD, pero como $\angle CBD = \alpha + \beta$ tenemos que $\angle CMD + \angle DBC = 180°$. Lo cual queríamos demostrar.

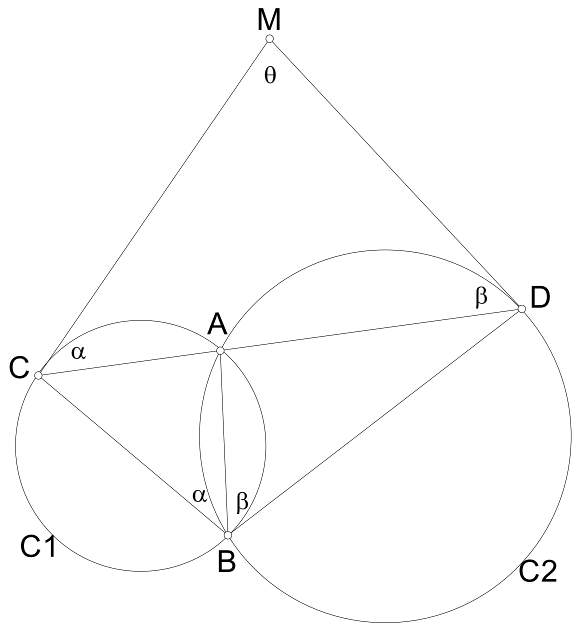

Figura 14

Problemas

1.- Por uno de los puntos C del arco AB de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda AB en los puntos D y E y a la circunferencia, en los puntos F y G. ¿ Para cuál posición del punto C en la cuerda AB, al cuadrilátero DEGF se le puede circunscribir una circunferencia ?

2.- Una línea PQ, paralela al aldo BC de un triángulo ΔABC, corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. La circunferencia que pasa por P y es tangente a AC en Q corta de nuevo a AB en R. Pruebe que el cuadrilátero RQCB es cíclico.

3.- Se toma un punto P en el interior de un rectángulo ABCD de tal manera que $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\angle DAP$ y $\angle BCP$.

4.- Sea ABCD un cuadrilátero cíclico, sea M el punto de intersección de las diagonales de ABCD, y sean E, F, G y H los pies de las perpendiculares desde M hacia los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Determine el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero EFGH.

5.- Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares, y sea P su intersección. Pruebe que las reflexiones de P con respecto a AB, BC, CD y DA son concíclicos.

6.- Demuestre que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.

7.- Demuestre que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita hasta un lado es igual a la mitad de la longitud del lado opuesto.

8.- Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea M un punto sobre el segmento AC, y P, Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la línea BM, respectivamente. Pruebe que BP = PQ + QC.

9.- Sea ΔABC un triángulo y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F sobre una línea que pasa por D de tal manera que AE es perpendicular a BE, AF es perpendicular a CF, E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Pruebe que AN es perpendicular a NM.

10.- A través del punto medio C de una cuerda arbitraria AB de una circunferencia, se han trazado dos cuerdas KL y MN (K y M se encuentran en un mismo lado de AB), Q es el punto de intersección de AB y KN, P es el punto de intersección de AB y ML. Demostrar que QC = CP. (Teorema de la Mariposa)

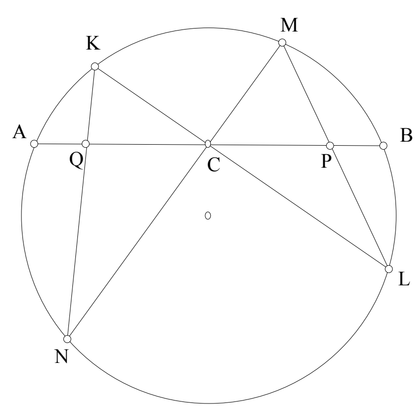

Figura 15

1.4 El Teorema de Tales

Teorema de Tales.- Si una línea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón *m* : *n*, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón *m* : *n*.

Por ejemplo, sean *p*, *q*, *r*, tres rectas paralelas. Si una línea *l* corta a las rectas en los puntos A, B y C, de manera tal que AB : BC = 2 : 1, y otra línea *t* corta a las rectas paralelas en D, E y F, también tendremos que DE : EF = 2 : 1.

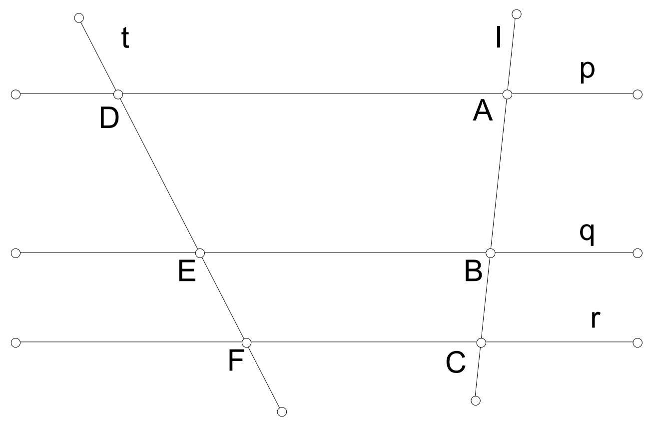

Figura 16

También el recíproco del teorema de Tales es aplicado a triángulos para demostrar segmentos paralelos. Por ejemplo, si en el triángulo ΔABC M y N son los puntos medios de los lados AB y AC, tenemos que AM : NB = AN : NC = 1 : 1, y por el teorema de Tales decimos que MN es paralelo a BC.

Ejemplo.- Sean F, G, H e I los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero FGHI es un paralelogramo.

Solución:
Tracemos la diagonal BD. Como F e I son los puntos medios de AB y AD respectivamente, tenemos que FI es paralelo a BD; también, como G y H son los puntos medios de BC y CD, entonces GH es paralelo a BD, de aquí tenemos que FI es paralelo a GH. Análogamente podemos demostrar que FG es paralelo a IH. Como el cuadrilátero FGHI tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos, entonces es un paralelogramo.

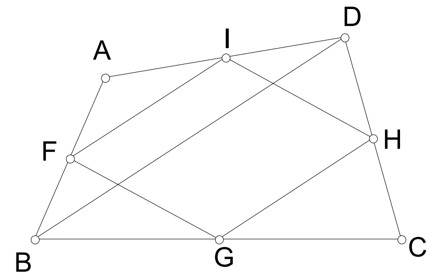

Figura 17

Problemas

1.- En la siguiente figura los segmentos a, b, c y d son paralelos y dividen al lado AB en 4 segmentos iguales. Si a = 10, encuentre la suma a + b + c + d.

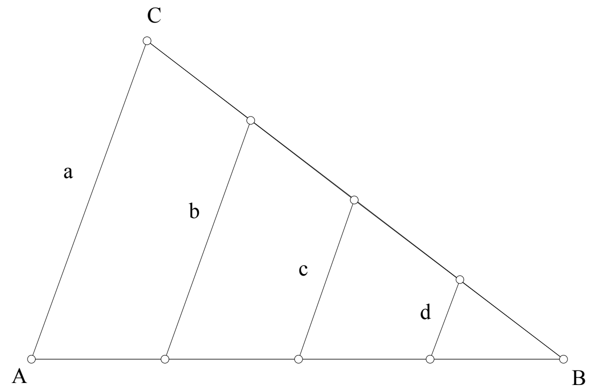

Figura 18

2.- Sea ABCD un paralelogramo en el que L y M son puntos medios de AB y CD, respectivamente. Demostrar que los segmentos LC y AM dividen la □iagonal BD en tres segmentos iguales.

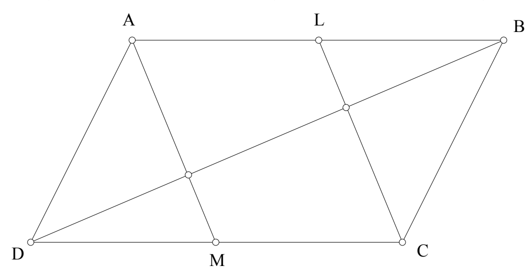

Figura 19

3.- En la siguiente figura, BE y AD son alturas del ΔABC. F, G y K son puntos medios de AH, AB, y BC, respectivamente. Pruebe que ∠FGK es un ángulo recto.

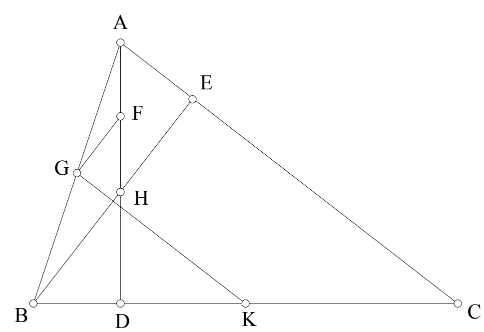

Figura 20

4.- Pruebe que las diagonales en un paralelogramo se cortan en su punto medio.

5.- Sea AM la mediana trazada hacia el lado BC de un triángulo ΔABC. Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Pruebe que el cuadrilátero ABNC es un paralelogramo.

6.- Pruebe que el segmento de línea, que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.

7.- En un paralelogramo ABCD, M es el punto medio de BC. DT es dibujada desde D y perpendicular a MA, como se muestra en la figura. Pruebe que CT = CD.

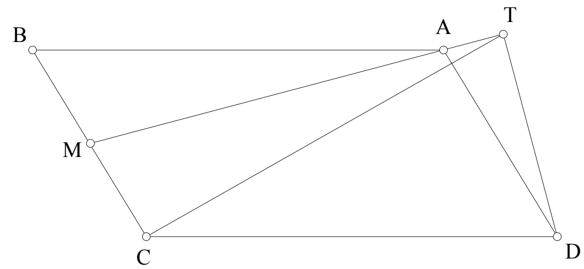

Figura 21

8.- En un paralelogramo ABCD se escogen los puntos E y F sobre la diagonal AC de manera que AE = FC. Si BE se extiende hasta intersectar AD en H, y BF se extiende hasta intersectar DC en G, pruebe que HG es paralelo a AC.

9.- AM es la mediana hacia el lado BC de un triángulo ΔABC. Se toma un punto P sobre AM. BP se extiende hasta intersectar AC en E, y CP se extiende hasta intersectar AB en D. Pruebe que DE es paralelo a BC.

10.- Sobre los lados AB y AC de un triángulo ΔABC se construyen hacia afuera los cuadrados ABNM y CAPQ. Sea D el punto medio del lado BC. Pruebe que PM = 2·AD.

1.5 Triángulos semejantes

Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma (aunque no necesariamente el mismo tamaño), es decir, si tienen sus tres ángulos iguales; por ejemplo:

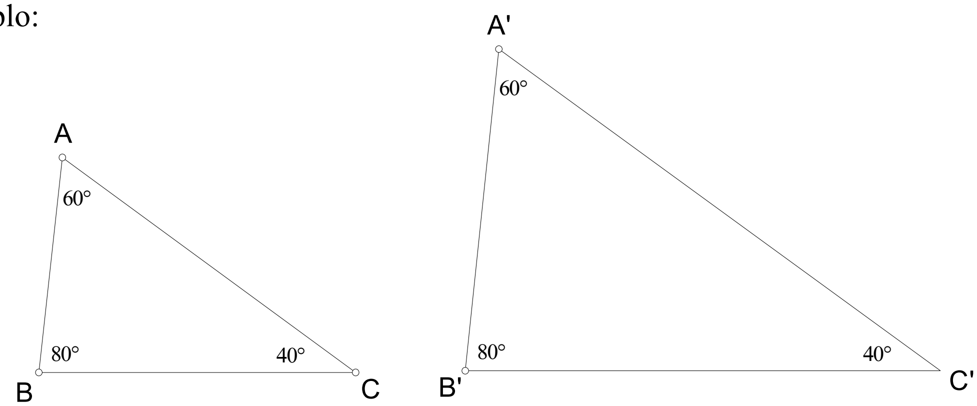

Figura 22

Los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' son semejantes. Si nosotros movemos el triángulo ΔABC hasta que el vértica A concida con el vértice A', y además, lo hacemos de tal manera que el lado AB quede exactamente encima del lado A'B', tendremos la siguiente figura:

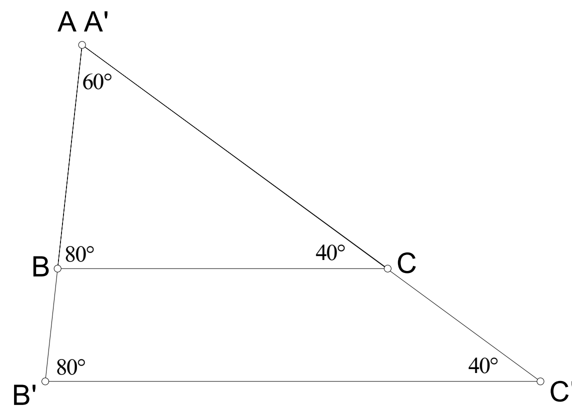

Figura 23

Aqui podemos observar que los lados BC y B'C' son paralelos, y de manera inversa, si nosotros trazamos una linea paralela a uno de los lados de un triángulo de manera que está corte a los dos lados restantes, entonces esta línea paralela cortará un triángulo semejante al triángulo original.

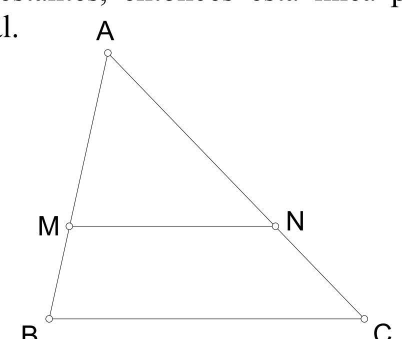

Figura 24

Utilizando lo anterior y el Teorema de Tales, tenemos las siguiente proporción:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA}$$

Sumando 1 en ambos lados tenemos:

$$\frac{BM}{MA} + 1 = \frac{CN}{NA} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{BM + MA}{MA} = \frac{CN + NA}{NA} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \qquad (1)$$

además, si trazamos una paralela a AB, la cual pase por el punto N, tendremos un paralelogramo MNPB (un paralelogramo es un cuadrilátero en el que cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud).

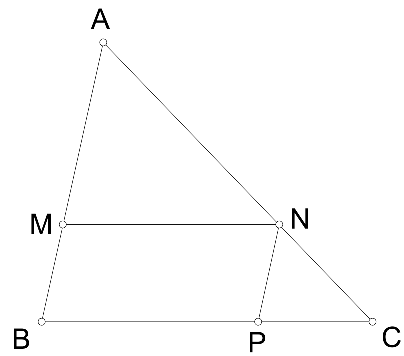

Figura 25

Utilizando nuevamente el Teorema de Tales tenemos que:

$$\frac{CP}{PB} = \frac{CN}{NA}$$

Nuevamente sumamos 1 en ambos lados y obtenemos que:

$$\frac{CB}{PB} = \frac{CA}{NA}$$

Pero como PB = NM, tenemos:

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN} \qquad (2)$$

Juntando los resultados de (1) y (2) tenemos:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN}$$

Es decir, si dos triángulos son semejantes entonces sus lados son proporcionales.
Para ilustrar ésto, vamos a hacer el siguiente:

Ejemplo 1.- Tenemos dos triángulos semejantes, digamos ΔABC y ΔMNP, conocemos que sus lados son iguales a los valores marcados en la siguiente figura, encontrar cuánto vale x.

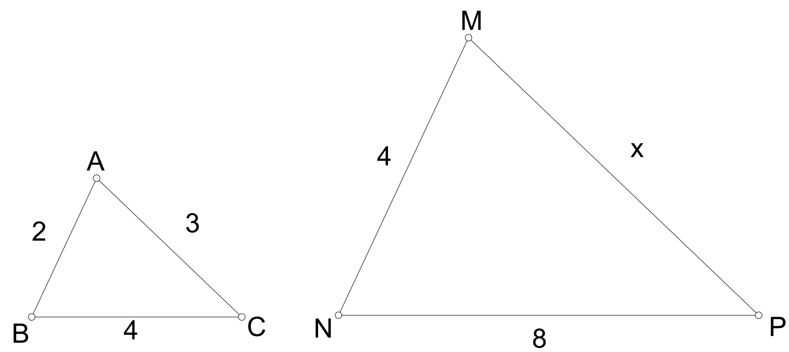

Figura 26

Solución:
Como tenemos que los lados de ambos triángulos son proporcionales, entonces:

$\frac{x}{3}=\frac{8}{4}$ con ésto llegamos a que el valor de x es 6.

Ejemplo 2.- En la siguiente figura, ABCD es un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros ΔABF y ΔADE, respectivamente. Pruebe que el triángulo ΔFCE es equilátero.

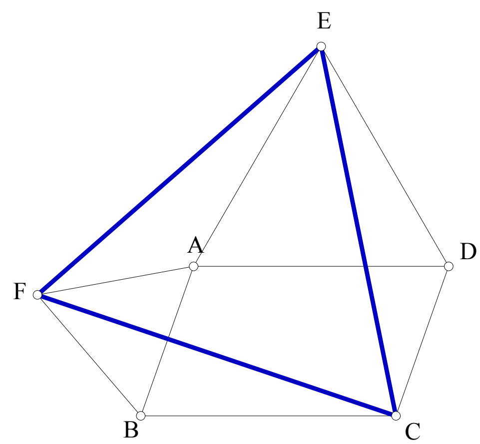

Figura 27

Solución:
Cuando dos triángulos además de ser semejantes tienen las longitudes de sus lados iguales, se dice que los triángulos son congruentes. En la figura anterior, tenemos que $\angle FAE + 120° + \angle BAD = 360°$, entonces $\angle FAE = 240° - \angle BAD = 180° - \angle BAD + 60°$ y como $\angle FBC = 180° - \angle BAD + 60°$ entonces $\angle FAE = \angle FBC$. Además, tenemos que FA = FB y AE = BC, esto implica que el triángulo ΔFAE es congruente al triángulo ΔFBC y por lo tanto FE = FC. De manera análoga podemos demostrar que EC = FE y así concluimos que el triángulo ΔFEC es equilátero.

Problemas

1.- Demostrar que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.

2.- En un triángulo ΔABC, la altura CE es extendida hasta G de tal manera que EG = AF, donde AF es la altura trazada hacia BC. Una línea a través de G y paralela a AB intersecta CB en H. Pruebe que HB = AB.

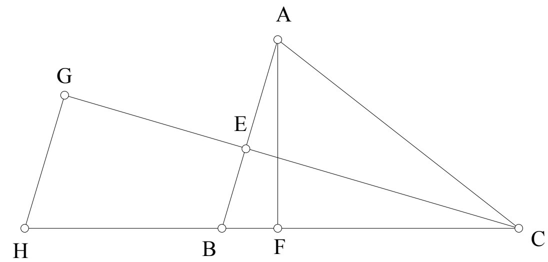

Figura 28

3.- En un trapecio ABCD (AB paralelo a DC) sea AB = a y DC = b. Sean M, N, P y Q los puntos medios de AD, BD, AC y BC repectivamente. Pruebe que:

a) MQ = $(a + b)/2$
b) NP = $|a - b|/2$

4.- En un trapecio ABCD (AB paralelo a DC) sea AB = a y DC = b. Sabemos que $\angle ADC + \angle BCD = 90°$. Sean M y N los puntos medios de AB y DC. Pruebe que MN = (b-a)/2.

5.- En un trapecio ABCD (AB paralelo a DC), las diagonales se intersectan en P, AM es una mediana del triángulo ΔADC, la cual intersecta BD en E. A través de E, se traza una línea paralela a DC la cual corta a AD, AC y BC en los puntos H,F y G, respectivamente. Pruebe que HE = EF = FG.

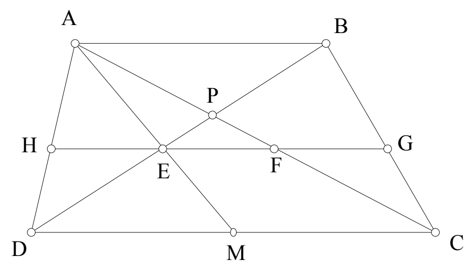

Figura 29

6.- Expresar el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.

7.- En un triángulo ΔABC, Z es un punto sobre la base AB. Una línea a través de A paralela a CZ intersecta BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta AC en Y. Pruebe que

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$$

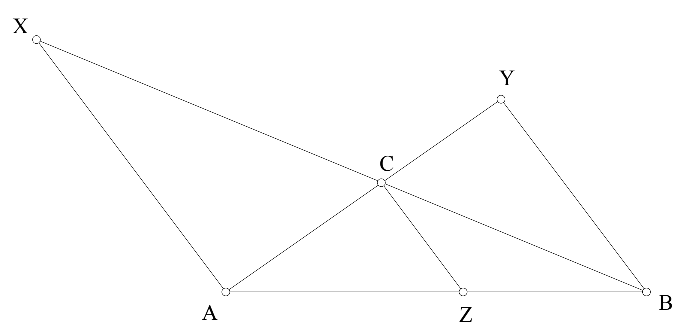

Figura 30

8.- Por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero ABCD se traza una recta que corta a AB en el punto M y a CD en el punto N. Por M y N se trazan las rectas paralelas a CD y AB, respectivamente, que cortan a AC y a BD en los puntos E y F. Demostrar que BE es paralelo a CF.

9.- En un cuadrilátero ABCD. Sobre las rectas AC y BD se toman los puntos K y M de manera que BK es paralelo a AD y AM es paralelo a BC. Demostrar que KM es paralelo a CD.

10.- Sea E un punto arbitrario sobre el lado AC del triángulo ΔABC. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria ***l.*** Por E, se traza una recta paralela a BC la cual corta *l* en el punto N. También por E, se traza una recta paralela a AB la cual corta *l* en el punto M. Demostrar que AN es paralelo a CM.

11.- Sean MN, PQ, RS tres segmentos iguales en los lados de un triángulo equilátero. Probar que en el triángulo formado por las líneas QR, SM y NP, los segmentos QR, SM y NP, son proporcionales a los lados en los que están contenidos.

12.- En un triángulo ΔABC, $\angle BAC = 100°$, $AB = AC$. Se elige un punto D en el lado AC de modo que $\angle ABD = \angle CBD$. Pruebe que $AD + DB = BC$.

13.- Sea ΔABC un triángulo equilátero y sea Γ el semicírculo que tiene a BC como diámetro y que es exterior al triángulo. Mostrar que si una línea que pasa por A trisecta a BC, entonces también trisecta al arco Γ.

1.6 El Teorema de Pitágoras

Antes de enunciar el Teorema de Pitágoras vamos a analizar un triángulo rectángulo el cual tiene trazada la altura hacia la hipotenusa.

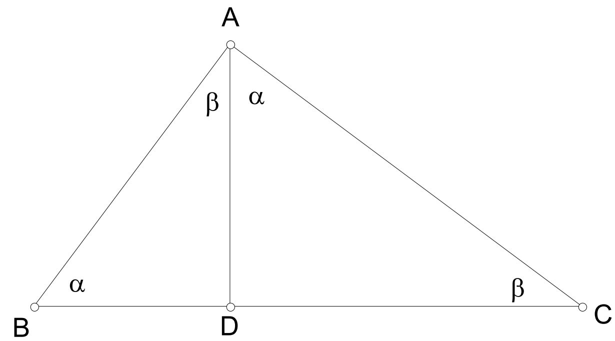

Figura 31

Sea ΔABC el triángulo mencionado el cual tiene trazada la altura AD y con ángulo recto en A. Sean $\angle ABC = \alpha$ y $\angle ACB = \beta$. Tenemos que $\alpha + \beta = 90°$, entonces también $\angle DAC = \alpha$ y $\angle BAD = \beta$. Así de ésta manera hemos obtenido dos triángulo semejantes al ΔABC, es decir, ΔBAD y ΔDAC son semejantes al triángulo ΔABC. De la semejanza entre ΔBAD y ΔDAC obtenemos:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

de aquí obtenemos que $AD^2 = BD \cdot DC$, y se dice que AD es la ***media geométrica*** o ***media proporcional*** de BD y DC. Además, de manera análoga podemos obtener también que $AB^2 = BD \cdot BC$ (de la semejanza de los triángulos ΔBAD y ΔABC) y que
$AC^2 = DC \cdot BC$ (de la semejanza de los triángulos ΔDAC y ΔABC).
Sumando éstas dos expresiones tenemos que $AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC$, ésto es
$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC \cdot BC$, es decir
$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Con ésto hemos probado el:

Teorema de Pitágoras.
La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Este teorema es atribuido a uno de los más grandes matemáticos de la antigua Grecia, Pitágoras y será de gran utilidad en muchos de los problemas que veremos en este libro.

Teorema.-Probar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

Demostración: Sea ABCD el paralelogramo y sean AB = CD = a y BC = DA = b. También sean AC = c y BD = d.

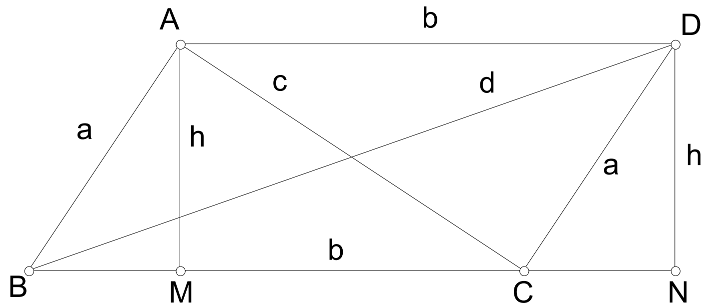

Figura 32

Tracemos perpendiculares a BC desde A y D, las cuales intersectan a BC en M y N. Sea AM = DN = h. Tenemos que BM = CN = x. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ΔDCN, ΔDBN, ΔAMC tenemos las siguientes igualdades:

$h^2 + x^2 = a^2$ (1)

$h^2 + (b + x)^2 = d^2$ (2)

$h^2 + (b - x)^2 = c^2$ (3)

sumando (2) y (3) tenemos:

$2h^2 + 2b^2 + 2x^2 = d^2 + c^2$ (4)

ahora utilizando (1) tenemos que $2h^2 + 2x^2 = 2a^2$, entonces (4) queda como sigue:

$2a^2 + 2b^2 = d^2 + c^2$, lo cual queriamos demostrar.

Problemas

1.- Probar el inverso del teorema de Pitágoras: si a, b y c son los lados de un triángulo que cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces es un triángulo rectángulo.

2.- En una circunferencia de radio R está trazado un diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia a de su centro. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente al diámetro en el punto A y es tangente interiormente a la circunferencia dada.

3.- En un triángulo ΔABC, E es un punto sobre la altura AD. Pruebe que $AC^2 - CE^2 = AB^2 - EB^2$.

4.- Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio R. Pruebe que $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

5.- Un trapecio ABCD, con AB paralelo a CD, tiene sus diagonales AC y BD perpendiculares. Pruebe que $AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2$.

6.- Demuestre que si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados opuestos son iguales, entonces sus diagonales son perpendiculares entre si.