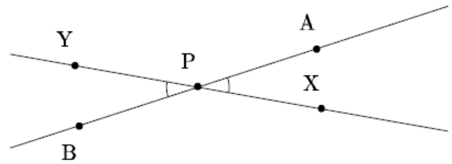
Geometría Euclidiana

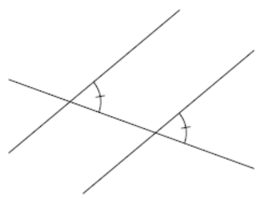
Ángulos.

Si dos líneas se cortan, los ángulos que quedan opuestos por el vértice son iguales, ya que ambos, sumados cualquiera de los ángulos adyacentes forman un ángulo de 180°.

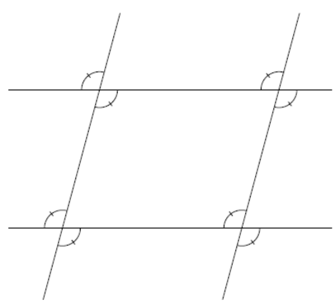


$$\angle XPA = \angle YPB$$
$$\angle XPA + \angle APY = 180^{o}, \qquad \angle YPB + \angle APY = 180^{o}$$

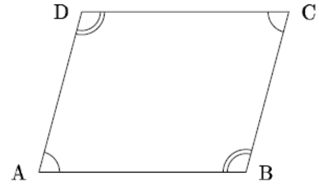
Otro resultado básico establece que si una recta corta a dos líneas paralelas, los ángulos correspondientes son iguales.



Combinando los dos resultados precedentes, obtenemos que en la siguiente figura en que se cortan dos pares de líneas paralelas, los ángulos marcados del mismo modo son iguales.

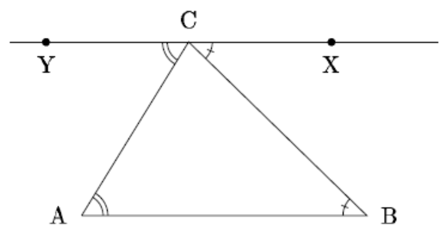


La figura anterior nos proporciona otro resultado importante: En un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales y los adyacentes suman 180^{o}.

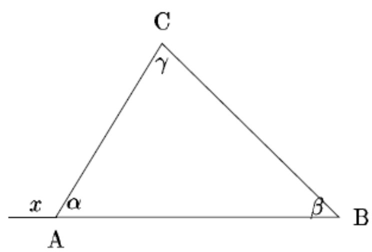


$$\angle A = \angle C, \qquad \angle A + \angle B = 180^{o}.$$

Otra consecuencia directa de las igualdades de ángulos entre paralelas es que en cualquier triangulo los ángulos internos suman 180°.



Ahora, consideremos por un momento los ángulos externos.

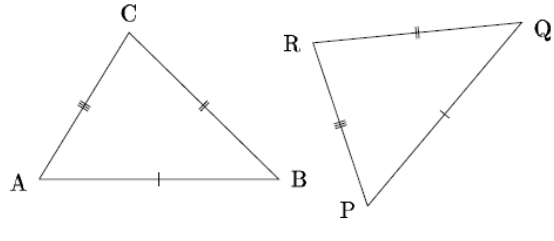


El ángulo externo x, sumado a α es igual a 180°. Por otro lado, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Esto quiere decir que $x = \beta+\gamma$. En otras palabras: En un triángulo, cada ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes.

Congruencia.

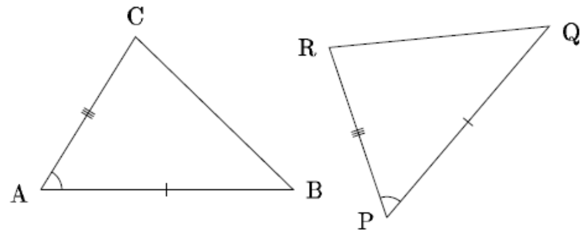
Para que dos triángulos sean congruentes, sus lados correspondientes deben ser iguales, lo mismo que sus ángulos. Sin embargo, usualmente no es necesario comprobar las 6 igualdades para establecer que dos triángulos son congruentes, sino que basta con verificar alguno de los siguientes criterios.

LLL Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son iguales.



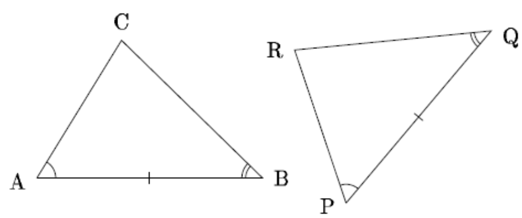
En la figura, cada par de lados correspondientes es igual, por lo que los triángulos son congruentes.

LAL Dos triángulos son congruentes, si dos pares de lados correspondientes son iguales, lo mismo que el ángulo entre ellos.



Como $AB = PQ$, $AC = PR$ y $\angle BAC = \angle QPR$, los triángulos son congruentes.

ALA Dos triángulos son congruentes, si tienen un par de lados correspondientes igual, lo mismo que los dos pares de ángulos que lo comprenden.



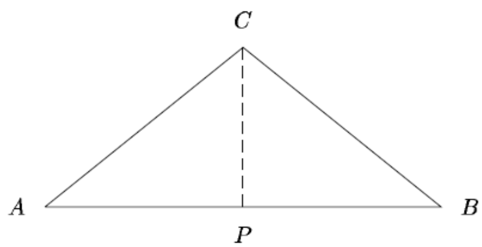
Aquí tenemos que $AB = PQ$, $\angle BAC = \angle QPR$ y $\angle CBA = \angle RQP$, suficiente para asegurar que los triángulos son congruentes.

La congruencia de triángulos se denota con el símbolo $\cong$ y se acostumbra a enumerar los vértices correspondientes en el mismo orden. Así, podríamos escribir $\Delta BAC \cong \Delta QPR$ o $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. En general, cuando en algún problema geométrico complejo se requiera probar que dos segmentos son iguales, en un gran número de casos, el problema se traduce en probar la congruencia de dos triángulos y verificar que los segmentos pedidos son lados correspondientes de esos triángulos.

Cabe también recordar que estos criterios son útiles únicamente en el caso de los triángulos. Por ejemplo, es posible que dos polígonos tengan todos sus lados correspondientes iguales y aún así no sean congruentes. Este es el caso de un cuadrado y un rombo cuyos lados tienen la misma longitud.

En general, para verificar que dos polígonos son congruentes, es necesario comprobar que todos sus lados y todos sus ángulos correspondientes son iguales. Una excepción la constituyen los polígonos regulares. Si se tienen dos polígonos regulares con el mismo número de lados, sólo necesitamos comprobar que el lado del primer polígono es igual al del segundo para concluir que son polígonos congruentes.

Un resultado muy conocido nos dice que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales miden lo mismo. Para verificarlo, tomemos un triángulo isósceles ABC en el que $AC = BC$. Queremos probar que $\angle BAC = \angle ABC$. Sea P el punto medio de BC, y fijémonos en los triángulos APC y BPC.



Por un lado, $CA = CB$ pues el triángulo es isósceles. Además, $AP = PB$ pues P es el punto medio, y $CA = CA$. El criterio LLL nos dice que $\Delta APC \cong \Delta BPC$ y por tanto los ángulos correspondientes $\angle BAC$ y $\angle ABC$ son iguales. Esto concluye la prueba.

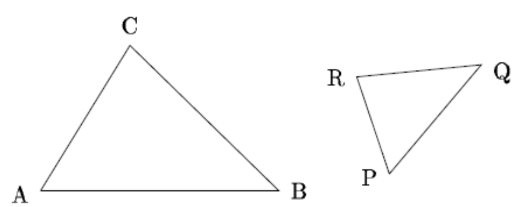
Podemos deducir otro resultado importante. Sea $ABCD$ un paralelogramo, y tracemos la diagonal AC. Los ángulos $\angle DAC$ y $\angle ACB$ son iguales por ser ángulos alternos internos entre paralelas (los lados son paralelos), al igual que $\angle DCA = \angle CAB$. Por el criterio ALA los triángulos ΔACD y ΔCAB son congruentes: La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes. Una consecuencia directa es que $DA = CB$ y $AB = CD$: Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

Semejanza

El concepto de semejanza es uno de los más fundamentales en el estudio de la geometría. Corresponde a lo que comúnmente llamamos “figuras a escala”, esto es, si tenemos una figura geométrica y dibujamos otra que sea 3 veces más grande, decimos que las dos figuras son semejantes y que están en proporción 1 : 3, o que el primero está en razón 1 : 3 al segundo.

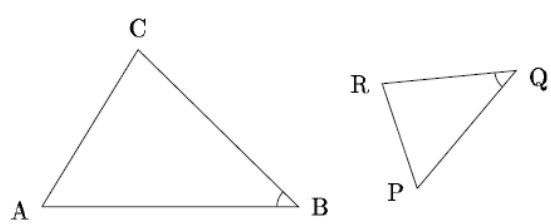
Prácticamente la totalidad de los problemas que involucran semejanza son acerca de semejanza de triángulos. Si dos triángulos ΔABC y ΔPQR son semejantes, escribimos $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, procurando nombrar los vértices correspondientes en el mismo orden. Cuando dos figuras geométricas son semejantes es porque tienen la misma forma y por tanto los mismos ángulos. Sin embargo, el converso no necesariamente es cierto, ya que, por ejemplo, un cuadrado y un rectángulo tienen sus ángulos correspondientes iguales y sin embargo no son semejantes. Del mismo modo, dos figuras semejantes tienen sus lados correspondientes en la misma proporción. Nuevamente el converso no es cierto (considere un rectángulo y un paralelogramo arbitrario cuyos lados correspondientes sean iguales), por lo que para asegurar que dos figuras son semejantes hay que verificar que todos sus ángulos correspondientes son iguales, así como verificar que todos los pares de lados correspondientes están en la misma proporción. Al igual que la congruencia, en el caso especial en que las dos figuras son triángulos se dispone de una serie de criterios que permiten establecer la semejanza de modo más rápido.

LLL Si dos triángulos tienen sus pares de lados correspondientes en la misma proporción entonces son semejantes.



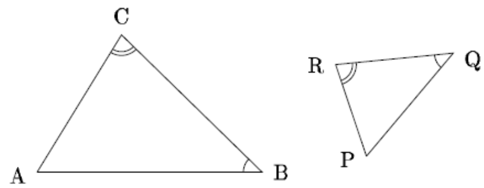
Como $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$, se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

LAL Si dos pares de lados correspondientes están en la misma razón, y el ángulo entre ellos es igual, entonces los triángulos son semejantes.



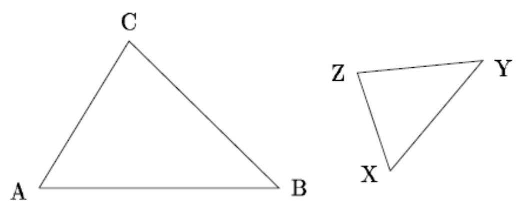
Si se tiene que $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ y $\angle$ *ABC* = $\angle$ *PQR* entonces Δ*ABC* ~ Δ*PQR.*

AA Si los triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.



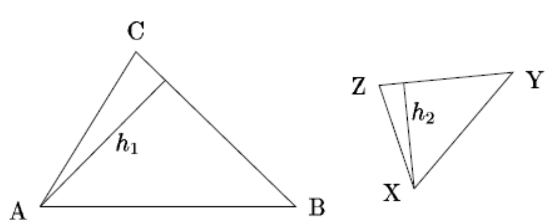
Como $\angle$ *ABC* = $\angle$ *PQR* y $\angle$ *ACB* = $\angle$ *PRQ*, sabemos que Δ*ABC* ~ Δ*PQR*.

En general, el tercer criterio es el preferido para determinar la semejanza de dos triángulos. Hacemos notar que los criterios se cumplen en ambas direcciones, es decir, si el triángulo Δ*ABC* es semejante al Δ*XY Z* entonces necesariamente los ángulos son iguales y los lados son proporciónales.



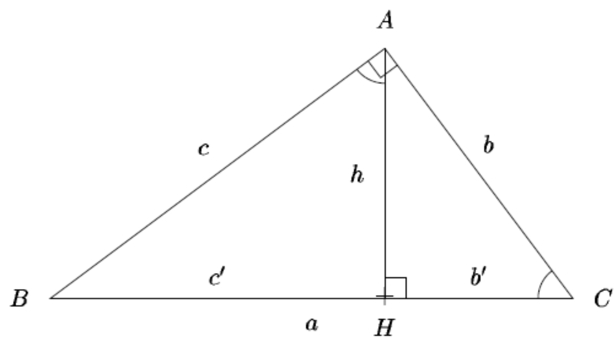
$$\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Rightarrow \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$$

Sin embargo, la verdadera utilidad del concepto de semejanza queda oculta en el estudio usual de la geometría, ya que se hace énfasis únicamente en las proporciones entre los lados, cuando en realidad, si dos triángulos son semejantes, todos sus elementos correspondientes (lados, alturas, medianas, radios, etc.) son también proporcionales. Así, la siguiente figura muestra dos triángulos semejantes en razón *k* (es decir $\frac{AB}{XY} = k$) e ilustra que sus alturas están en la misma proporción ($\frac{h_1}{h_2} = k$).



$$\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Rightarrow \frac{AB}{XY} = \frac{h_1}{h_2}$$

Ahora analizaremos una situación importante que se usa con mucha frecuencia. Sea *ABC* un triángulo rectángulo (con $\angle BAC = 90°$) y tracemos la altura *AH*. Usaremos letras minúsculas para referirnos a las longitudes de los segmentos ($a = b' + c'$).



Notemos que $\angle HCA + \angle CAH = 90°$ puesto que el tercer ángulo del ΔAHC es recto y los tres ángulos deben sumar 180°. Por otro lado, $\angle CAH + \angle HAB = 90°$, lo que implica $\angle HCA = \angle HAB$. Un argumento similar nos muestra que $\angle ABH = \angle CAH$. Por el criterio AA, tenemos las siguientes semejanzas de triángulos: $\Delta ABC \sim \Delta HBA \sim \Delta HAC$. Esto es, la altura de un triángulo rectángulo levantada sobre la hipotenusa, lo divide en dos triángulos semejantes al original.

La semejanza de triángulos implica las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{h}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{c'}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}$$

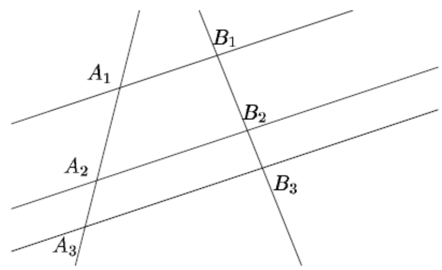
las cuales se resumen en tres simples relaciones:

$$b^2 = ab'$$
$$c^2 = ac'$$
$$h^2 = ab$$

La última de estas tres relaciones se obtuvo de la razón $\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}$ y usualmente se expresa de la siguiente manera: la altura de un triángulo rectángulo levantada sobre la hipotenusa, es la media geométrica de los segmentos en que divide a la hipotenusa.

Finalmente, notemos que $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a^2$. La relación $a^2 = b^2 + c^2$ se conoce como el Teorema de Pitágoras y se expresa como “En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

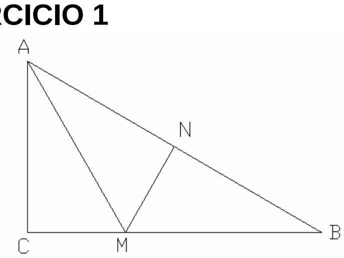
Otro caso importante ocurre cuando dos triángulos tienen sus lados paralelos. En este caso, los ángulos correspondientes son automáticamente iguales y por tanto los triángulos son semejantes. Un teorema estrechamente relacionado con este último hecho es el Teorema de Tales: “Si dos rectas cortan un haz de rectas paralelas, los segmentos que determinan son proporcionales”.



$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

Para ver la relación entre este teorema y el anterior, se prolongan las rectas hasta que se corten, y se obtienen triángulos cuyos lados son paralelos (de hecho dos pares coinciden), de donde se obtienen semejanzas que son equivalentes al Teorema de Tales. (Cuando el par de rectas también es paralelo, las rectas no se cortan, pero $A_1A_2 = B_1B_2$ y $A_2A_3 = B_2B_3$ por lo que las fracciones de arriba son ambas iguales a 1).

EJERCICIO 1



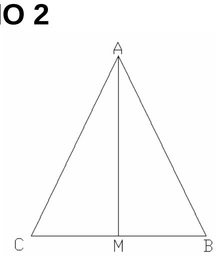
HIPOTESIS:

1) AM es bisectriz del $\angle$ CAB.
2) ACB es un triangulo rectángulo en C.
3) MN $\perp$ AB en N.

TESIS:

CM $\cong$ MN

EJERCICIO 2



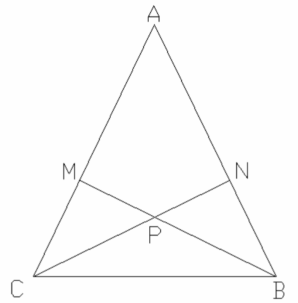
HIPOTESIS:

1) M es el punto medio de CB
2) $\angle$ C $\cong$ $\angle$ B

TESIS:

$\angle$ CAM $\cong$ $\angle$ BAM

EJERCICIO 3



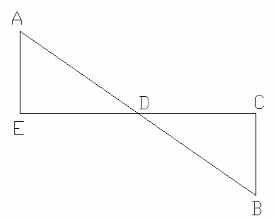
HIPOTESIS:

1) AC ≅ AB
2) AM ≅ AN
3) CN y BM se intersectan en P

TESIS:

BM ≅ CN

EJERCICIO 4



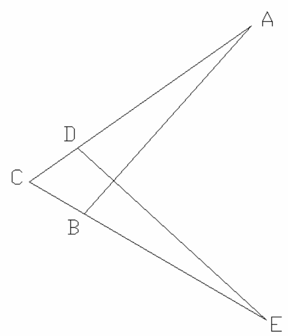
HIPOTESIS:

1) D es punto medio de EC y AB

TESIS:

AE ≅ BC

EJERCICIO 5



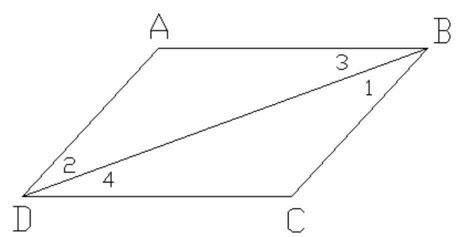
HIPOTESIS:

1) ∠ ADE ≅ ∠ EBA
2) DC ≅ BC

TESIS:

AB ≅ ED

EJERCICIO 6



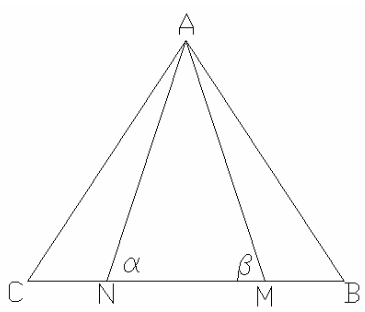
HIPOTESIS:

1) ∠ 3 ≅ ∠ 4
2) ∠ 1 ≅ ∠ 2

TESIS:

AB ≅ CD
AD ≅ CB

EJERCICIO 7



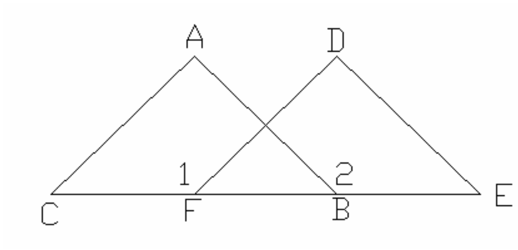
HIPOTESIS:

1) AB ≅ AC
2) CN ≅ BM
3) N y M son punto sobre CB

TESIS:

AN ≅ AM

EJERCICIO 8



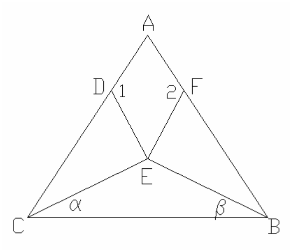
HIPOTESIS:

1) $\angle 1 \cong \angle 2$
2) AB ≅ DF
3) CF ≅ BE
4) C, F, B y E son colineales

TESIS:

AC ≅ DE

EJERCICIO 9



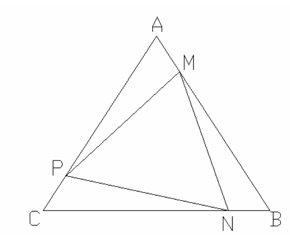
HIPOTESIS:

1) DE ≅ EF
2) DC ≅ BF
3) $\angle \alpha \cong \angle \beta$
4) A, D, C y A, F, B son puntos colineales

TESIS:

$\angle 1 \cong \angle 2$

EJERCICIO 10



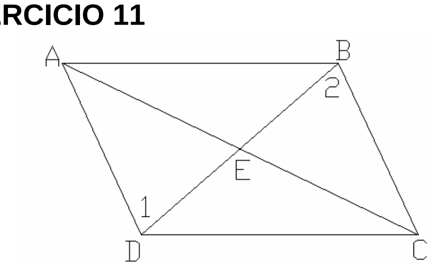
HIPOTESIS:

1) AM ≅ BN ≅ CP
2. ABC es un triángulo equilátero

TESIS:

MNP es un triángulo equilátero

EJERCICIO 11



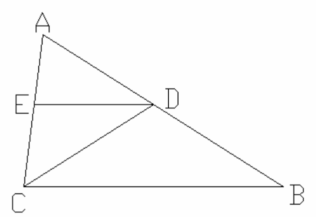
HIPOTESIS:

1) $\angle 1 \cong \angle 2$
2) E es punto medio de BD

TESIS:

AD ≅ BC
AB ≅ CD

EJERCICIO 12



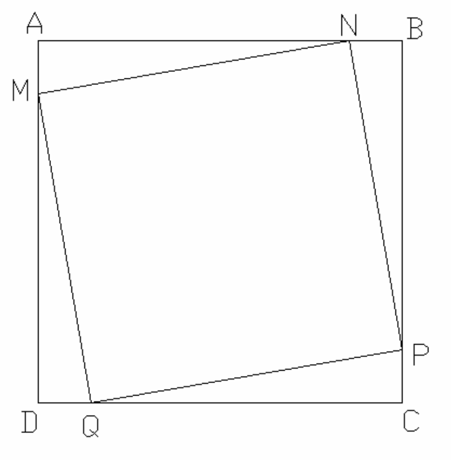
HIPOTESIS:

1) D es punto medio de AB
2) $\angle$B ≅ $\angle$DCB
3) ED es bisectriz del $\angle$ADC

TESIS:

AE ≅ EC

EJERCICIO 13



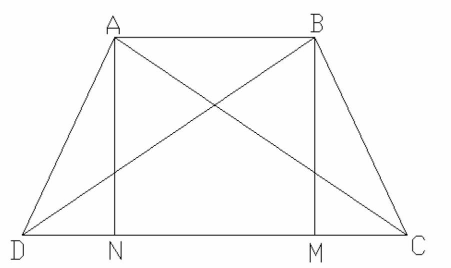
HIPOTESIS:

1) AB ⊥ BC en B
2) AB ⊥ AD en A
3) AD ⊥ DC en D
4) BC⊥ DC en C
5) AB ≅ BC ≅ CD ≅ DA
6) NB ≅ PC ≅ QD ≅ MA

TESIS:

NM ≅ MQ ≅ QP ≅ PN
MN⊥ NP en N
MN⊥ MQ en M
MQ ⊥ QP en Q
NP⊥ QP en P

EJERCICIO 14



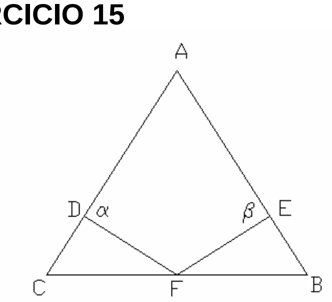
HIPOTESIS:

1) AN⊥ DC en N
2) BM⊥ DC en M
3) AN ≅ BM
4) DM ≅ CN

TESIS:

AC ≅ BD

EJERCICIO 15



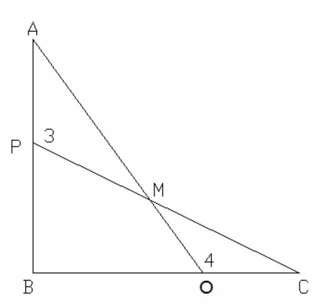
HIPOTESIS:

1) AC ≅ AB
2) F es punto medio de BC
3) AD ≅ AE

TESIS:

∠α≅ ∠β

EJERCICIO 16



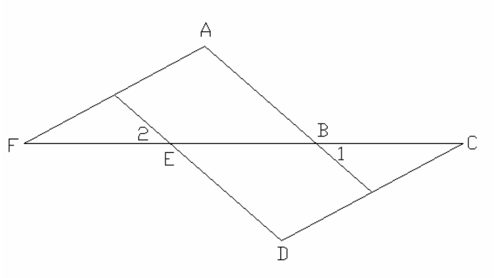
HIPOTESIS:

1) ∠3 ≅ ∠4
2) AB ⊥ BC en B
3) PB ≅ QB
4) AQ y PC se intersectan en M

TESIS:

AM≅ CM
MP ≅ MQ

EJERCICIO 17



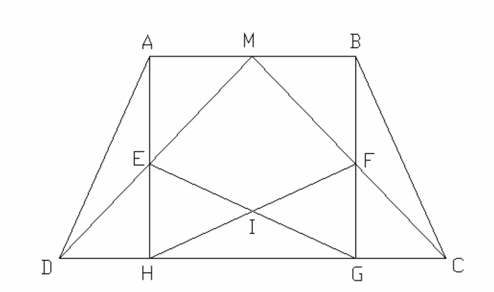
HIPOTESIS:

1) AB $\cong$ ED
2) $\angle 1 \cong \angle 2$
3) FE $\cong$ BC

TESIS:

AF $\cong$ DC

EJERCICIO 18



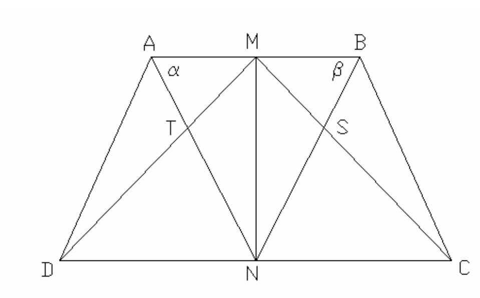
HIPOTESIS:

1) M es punto medio de AB
2) AD $\cong$ BC
3) DH $\cong$ GC
4) AH $\perp$ DC en H
5)BG $\perp$ DC en G
6) AH y DM se intersectan en E
7) BG y MC se intersectan en F
8) EG y FH se intersectan en I

TESIS:

EG $\cong$ FH

EJERCICIO 19



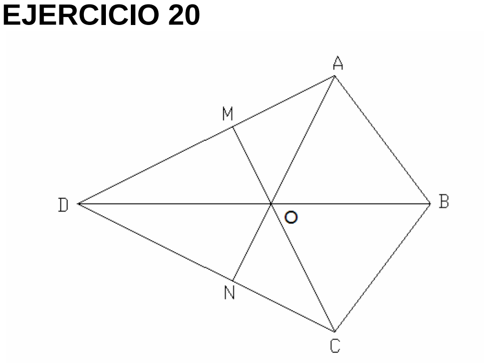
HIPOTESIS:

1) M y N son puntos medios de AB y DC
2) $\angle \alpha \cong \angle \beta$
3) AD $\cong$ BC
4) AN y DM se intersectan en T
5) BN y MC se intersectan en S

TESIS:

AT $\cong$ BS

EJERCICIO 20



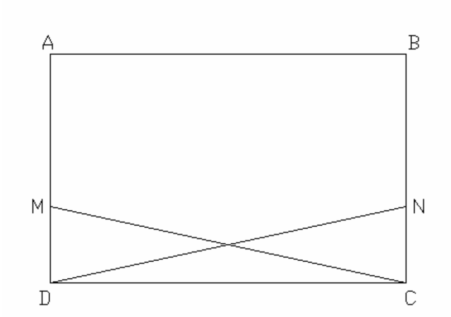
HIPOTESIS:

1) OM $\perp$ AD en m
2) ON $\perp$ CD en N
3) MO $\cong$ NO
4) MC, AN y DB se intersectan en O

TESIS:

AB $\cong$ CB

EJERCICIO 21



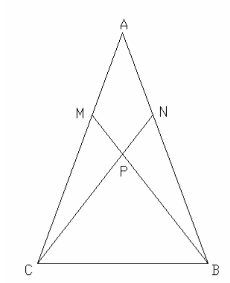
HIPOTESIS:

1) AD ⊥ DC en D
2) BC ⊥ DC en C
3) MD ≅ CN

TESIS:

CM ≅ CN

EJERCICIO 22



HIPOTESIS:

1) AC ≅ AB
2) ∠α ≅ ∠β
3) MB y CN se intersectan en P

TESIS:

MP ≅ PN
AM ≅ AN

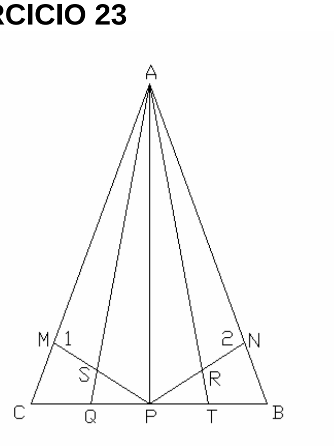
HIPOTESIS:

1) AC ≅ AB
2) CP ≅ BP
3) MB y CN se intersectan en P

TESIS:

MP ≅ PN
AM ≅ AN

EJERCICIO 23



HIPOTESIS:

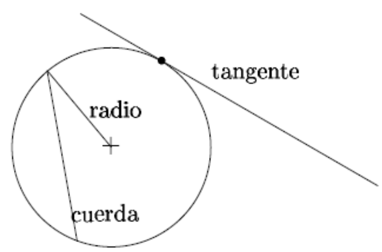
1) < 1 ≅ <2
2) < MPC ≅ < NPB
3) MP ≅ PN
4) Q y T son puntos medios de CP y PB respectivamente

TESIS:

AP es bisectriz del ∠QAT y ∠MPN
MS ≅ RN

El círculo.

Los teoremas principales sobre un círculo se relacionan con medidas de ángulos en diversas posiciones. Antes de enunciarlos, recordemos los elementos importantes de un círculo. El borde de un círculo se denomina *circunferencia*, aunque usualmente al referirnos a ésta decimos también círculo. En general, el contexto determina fácilmente a qué nos referimos. El *centro* del círculo es el punto del cual equidistan los puntos de la circunferencia. A cada uno de los segmentos que unen el centro con algún punto de la circunferencia le llamamos *radio*, aunque también usamos esta palabra para referirnos a su longitud en vez de a un segmento en particular. Un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*, y a la línea que la contiene le llamamos *secante*. Las cuerdas de mayor longitud son las que unen dos puntos opuestos del círculo y pasan por el centro. A cada una de estas cuerdas, así como a su longitud, le llamamos *diámetro*. En particular, refiriéndonos a longitudes, un diámetro es el doble de un radio. Una recta que toca al círculo en un único punto se denomina *tangente* y el punto de contacto se denomina *punto de tangencia*.



Los arcos de círculo no se miden en centímetros ni en pulgadas, ni en cualquier otra medida de longitud. Se miden en grados (o en radianes). Una circunferencia completa mide 360°.

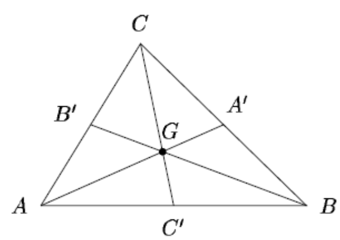
Los ángulos que tienen su vértice en el centro del círculo se llaman ángulos centrales, por lo que el teorema mencionado frecuentemente se enuncia como “Un ángulo central mide los mismo que el arco que subtiende”.

Cuando un ángulo tiene su vértice en un tercer punto de la circunferencia, se denomina un ángulo inscrito. La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que comprende.

Existen otros ángulos especiales en un círculo, aunque por no ser de uso tan frecuente omitimos las pruebas de la relaciones entre sus medidas y los arcos. El ángulo que se forma con una tangente y una cuerda se denomina ángulo semi-inscrito. La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco que comprende.

El centroide.

A los puntos con propiedades especiales en los triángulos suele llameárseles *centros del triángulo*. Existen cientos de ellos, pero unos cuantos destacan entre ellos. Sea *ABC* un triángulo cualquiera, y sean *A'; B'; C'* los respectivos puntos medios de los lados *BC; CA* y *AB*, entonces se cumple que las líneas *AA'; BB' y CC'* pasan por un mismo punto.

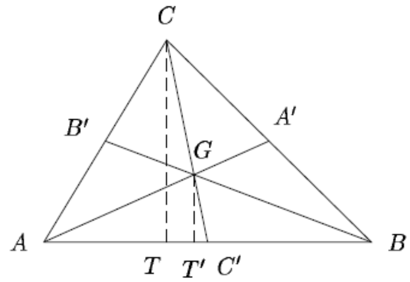


Las líneas que unen los puntos medios de cada lado con el vértice opuesto se llaman *medianas* del triángulo y el punto *G* donde se cortan las tres líneas se llama *centroide* del triángulo. Otros nombres que recibe son *gravicentro*, *baricentro*, *centro de gravedad* o incluso simplemente *centro* del triángulo aunque esta última forma se desaconseja porque se confunde fácilmente con otros puntos importantes del triángulo.

La propiedad más notable del centroide, es que el centroide divide a cada una de las medianas del triángulo en razón 2 : 1. Esto quiere decir que

$$AG = 2GA'; \quad BG = 2GB'; \quad CG = 2GC'$$

De este hecho se deriva que cada uno de los tres triángulos ΔGBC; ΔGCA y ΔGAB tienen un tercio del área del ΔABC.



Tracemos las alturas *CT* y *GT’* de los triángulos ΔABC y ΔGBC. Notemos que por tener lados paralelos, los triángulos $\Delta CTC'$ y $\Delta GT'C'$ son semejantes de modo que

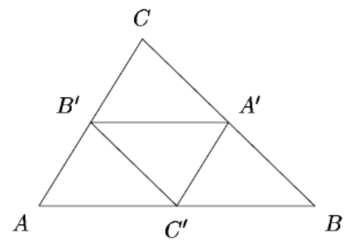
$$\frac{GC'}{CC'} = \frac{GT'}{CT}$$

Pero como *G* es el centroide y *CC’* es una mediana, se cumple que *CG* = 2*GC’*, lo que es lo mismo que *CC’* = 3*GC’*. Esto significa que $\frac{GC'}{CC'} = \frac{1}{3}$ y por tanto $\frac{GT'}{CT} = \frac{1}{3}$. Concluimos entonces que *CT* = 3*GT’* (la altura de ΔABC es el triple de la del ΔGBC). Como los triángulos ΔABC y ΔGBC tienen la misma base, y la altura del primero es el triple de la del segundo, el área de ΔABC es el triple de la del ΔGBC. Este argumento lo podemos repetir para los triángulos ΔGCA y ΔGAB, concluyendo que los tres triángulos pequeños tienen la misma área (un tercio de la de ΔABC).

Esto concluye la prueba de que el centroide del triángulo lo divide en tres triángulos de igual área al unirse con los vértices. En la sección de problemas se demuestra que el centroide es el único punto con esta propiedad.

Concentremos nuestra atención en los 6 triángulos que se obtienen al dibujar las tres medianas. Cada uno de ellos tiene un sexto del área del triángulo original; el triángulo $\Delta AC'G$ tiene la misma altura que el triángulo ΔAGB pero su base es solo la mitad, de modo que el área de $\Delta AC'G$ es un medio de la del ΔAGB y por tanto igual a un sexto de la del ΔABC. Un argumento similar se aplica a los cinco triángulos restantes. Todas estas Propiedades del centroide relativas a áreas se relacionan estrechamente con el hecho de que el centroide es el centro de gravedad del triángulo: cualquier línea que pase por el centroide divide al triángulo en dos regiones de área igual.

Otro elemento del triángulo relacionado con el centroide y las medianas es el *triángulo de los puntos medios* o simplemente el *triángulo medio*. Como su nombre lo indica, es el triángulo determinado por los puntos medios de los lados en un triángulo dado:

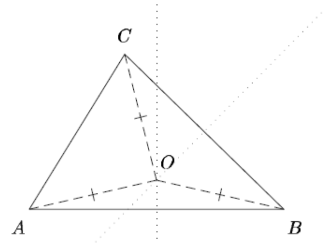


Los lados del triángulo medio $\Delta A'B'C'$ son paralelos a los del ΔABC, y por tanto ambos son semejantes. En particular $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{2A'C'}{A'C'} = 2$, lo que quiere decir que $AB = 2A'B'$. Hemos probado que los lados del triángulo medio miden la mitad de los correspondientes en el triángulo original. El triángulo medio divide al triángulo original en cuatro partes congruentes entre sí (criterio LLL), por lo que el área del triángulo medio es un cuarto del área del triángulo original.

El circuncentro.

Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Tracemos la mediatriz de *AB* (la perpendicular que pasa por su punto medio) y la mediatriz de *BC*. Sea *O* el punto donde se cortan. Recordemos que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos. Como *O* está en la mediatriz de *AB* entonces *OA* = *OB*, y como está en la mediatriz de *BC* entonces *OB* = *OC*. Esto implica que *OC* = *OA*, la cual es la condición que cumplen los puntos de la mediatriz de *CA*.

Nuestra conclusión es que las mediatrices de los tres lados pasan por un mismo punto (son concurrentes), y ese punto está a la misma distancia de *A; B* y *C*.

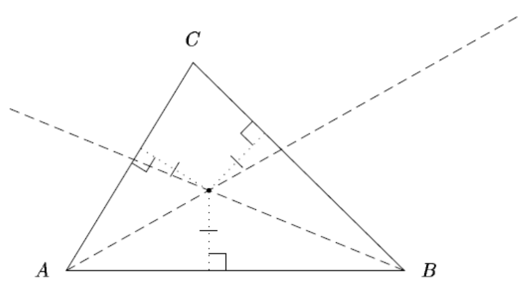


Lo anterior nos dice que si trazamos un círculo con centro *O* y radio *PA*, el círculo pasará por los otros dos vértices. Hemos probado entonces que para todo triángulo existe un único círculo que pasa por sus tres vértices. Tal círculo se denomina el *circuncirculo* del triángulo, y su centro se denomina el *circuncentro* del triángulo. El radio del circuncirculo se llama *circunradio*. Podemos resumir todo lo anterior como: el circuncentro de un triángulo es el único punto que equidista de los tres vértices y se encuentra en el punto de intersección de las mediatrices de los lados.

Si el triángulo es agudo, el circuncentro queda en su interior, mientras que si es obtuso en el exterior. Cuando el triángulo es rectángulo, el circuncentro queda en el punto medio de la hipotenusa (observa que el ángulo recto es un ángulo inscrito). Como el circuncentro equidista de los tres vértices, tenemos que el segmento que une el punto medio de la hipotenusa y el vértice de 90° mide lo mismo que la mitad de la hipotenusa, o de manera más simple: en un triángulo rectángulo, el circunradio vale la mitad de la hipotenusa.

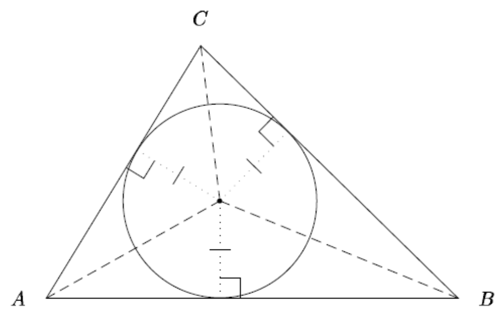
El incentro y los excentros.

Ahora consideremos el triángulo ΔABC y tracemos las bisectrices. Como las bisectrices son el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados, tenemos que los puntos de la bisectriz del $\angle ABC$ están a la misma distancia de *AB* que de *BC*, mientras que los de la bisectriz del $\angle CAB$ equidistan de los lados *AB* y *AC*.

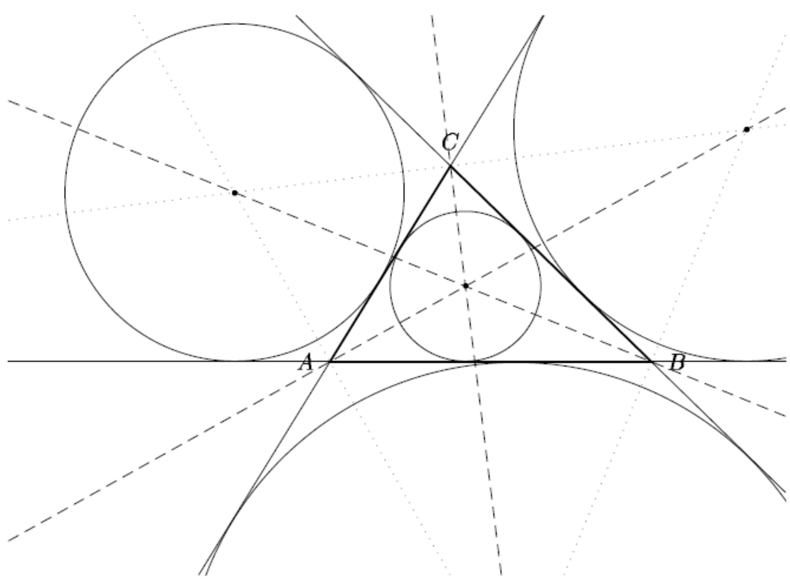


Esto quiere decir que el punto donde estas dos bisectrices se cortan está a la misma distancia de *AB; BC* y *CA* y por tanto la tercera bisectriz debe pasar por ahí: las tres bisectrices internas de un triángulo pasan siempre por un mismo punto.

El punto donde las tres bisectrices internas se cortan se denomina el *incentro* del triángulo. Cuando decimos que ese punto equidista de los tres lados queremos decir que si trazamos perpendiculares a los tres lados, estas deben medir lo mismo. En particular, si trazamos un círculo con esa radio y cuyo centro sea el punto de corte de las bisectrices, obtenemos un círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. Este círculo se llama el *incírculo* del triángulo, y su radio se conoce como el *inradio*.

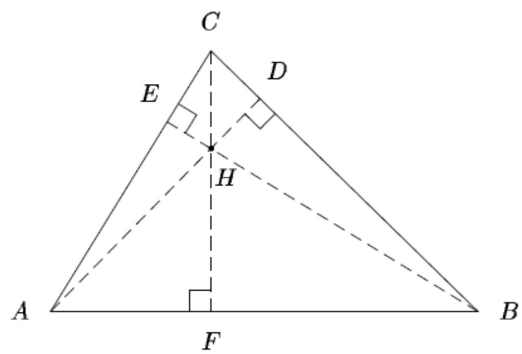


Si consideramos también las bisectrices externas a los lados (que junto con las internas forman el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados (o sus prolongaciones) obtenemos otros tres puntos de corte fuera del triángulo denominados *excentros*. Por razones similares a las expuestas para el *incentro*, existen círculos alrededor de los excentros que son tangentes a los lados (o a sus prolongaciones), estos se denominan los *excírculos* del triángulo.



El ortocentro.

Finalmente, consideremos las tres alturas de un triángulo (perpendiculares a los lados que pasan por los vértices opuestos). Al igual que con las medianas, las mediatrices y las bisectrices, se cumple que las tres alturas de un triángulo concurren. No daremos una prueba ahora, sino que lo obtendremos más adelantes a partir del Teorema de Ceva.



El punto donde se cortan las alturas de un triángulo se llama *ortocentro* del triángulo. En la figura anterior, *H* es el ortocentro de ΔABC. Otro elemento del triángulo que se relaciona con las alturas es el *triángulo órtico*, que está formado por los pies de las tres alturas. Así, ΔDEF es el triángulo órtico del ΔABC.

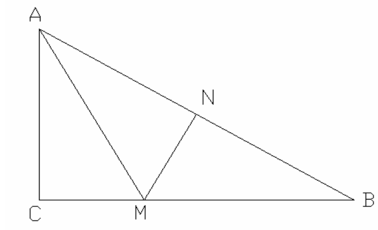
Una propiedad muy notable es que el ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico. En la figura anterior, quiere decir que *H* es el incentro de ΔDEF. Para demostrar esto, hay que probar que *AD; BE y CF* son las bisectrices internas del ΔDEF.

Ejercicios

1. Demuestra que las medianas dividen el triángulo en seis partes de áreas iguales.
2. Demuestra que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas de un triángulo dado, es igual a ¾ del área del triángulo dado.
3. Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.
4. Demuestra que la longitud de la mediana trazada hacia la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.
5. Sean a, b y c los lados *BC*, *CA* y *AB*, de un triángulo *ABC*. Sea *I* el incentro y *D* el punto donde la bisectriz del $\angle BAC$ corta al lado *BC*. Demuestra que:
$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$$
6. En un triángulo *ABC* sea *I* el incentro. Demuestra que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo *BIC* está sobre la línea *AI*.
7. Sean *M*, *N* y *P*, los puntos medios de los arcos *BC*, *CA* y *AB*, respectivamente, de la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*. *MP* y *MN* intersectan en *D* y *E* a los lados *AB* y *AC*. Demuestra que *DE* es paralela a *BC* y que pasa por el incentro del triángulo *ABC*.
8. Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.
9. En un triángulo *ABC* sean *H* el ortocentro y *O* el circuncentro. Sea *D* el punto donde la línea *AO* intersecta al circuncírculo. Demuestra que *HD* bisecta el lado *BC*.
10. En un triángulo *ABC* sean *H* el ortocentro, *O* el circuncentro, *M* el punto medio del lado *BC*. Demuestra que *AH* es el doble de *OM*.

Solución a los Ejercicios de Congruencias

EJERCICIO 1

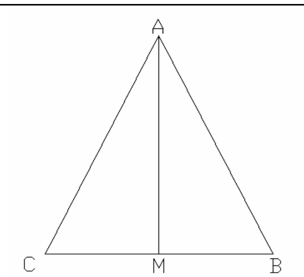


HIPOTESIS:
1) AM es bisectriz del $\angle$ CAB.
2) ACB es un triangulo rectángulo en C.
3) MN $\perp$ AB en N.

TESIS:
CM $\cong$ MN

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACIÓN:
1).- $\angle$ CAM $\cong$ $\angle$ MAN	Hipótesis 1) ya que AM es bisectriz del $\angle$ CAN
2).- AM $\cong$ AM	Principio de identidad
3).- $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ MAN	Ambos son rectos, hipótesis 2) y 3)
4).- Δ ACM $\cong$ Δ ANM	Teorema (AAL) 1), 3) y 2)
5).- $\therefore$ CM $\cong$ MN	Por ser homólogos

EJERCICIO 2

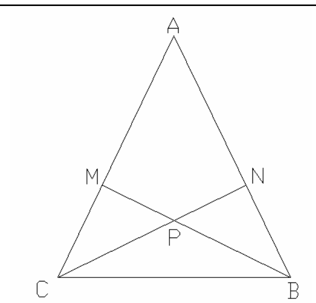


HIPOTESIS:
1) M es el punto medio de CB
2) $\angle$ C $\cong$ $\angle$ B

TESIS:
$\angle$ CAM $\cong$ $\angle$ BAM

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle$ C $\cong$ $\angle$ B	
2).- AC $\cong$ AB	A ángulos iguales se oponen los lados iguales Δ ABC
3).- CM $\cong$ MB	Hipótesis 1) de punto medio
4).- Δ AMB $\cong$ Δ ANC	Teorema (LAL), 2), 1) y 3)
5).- $\therefore$ $\angle$ CAM $\cong$ $\angle$ BAM	Por ser homólogos

EJERCICIO 3

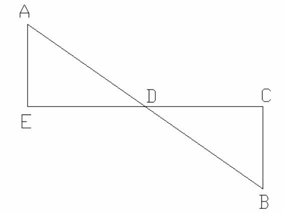


HIPOTESIS:
1) AC $\cong$ AB
2) AM $\cong$ AN
3) CN y BM se intersectan en P

TESIS:
BM $\cong$ CN

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- AC $\cong$ AB	Hipótesis 1)
2).- AM $\cong$ AN	Hipótesis 2)
3).- $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ MAN	Principio de identidad
4).- Δ AMB $\cong$ Δ ANC	Teorema (LAL) 1) , 3) y 2)
5).- $\therefore$ BM $\cong$ CN	Por ser homólogos

EJERCICIO 4



HIPOTESIS:

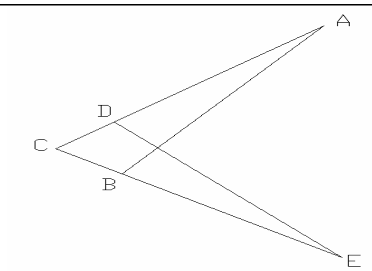
1) D es punto medio de EC y AB

TESIS:

$AE \cong BC$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $ED \cong DC$	Hipótesis 1) de punto medio
2).- $AD \cong DB$	Hipótesis 1) de punto medio
3).- $\angle ADE \cong \angle CDB$	Por ser opuestos por el vértice
4).- $\Delta\ ADE \cong \Delta\ CDB$	Teorema (LAL) 1), 3) y 2)
5).- $\therefore AE \cong BC$	Por ser homólogos

EJERCICIO 5



HIPOTESIS:

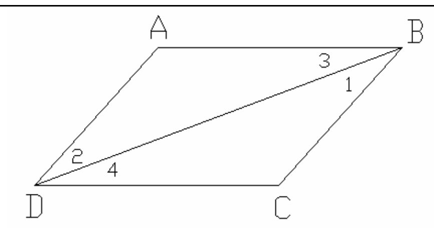
1) $\angle ADE \cong \angle EBA$
2) $DC \cong BC$

TESIS:

$AB \cong ED$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle EDA \cong \angle ABE$	Hipótesis 1)
2).- $DC \cong BC$	Hipótesis 2)
3).- $\angle CDE + \angle EDA = 180º$	Por ser ángulos colineales
4).- $\angle CBA + \angle ABE = 180º$	Por ser ángulos colineales
5).- $\angle CDE + \angle EDA = \angle CBA + \angle ABE$	Igualando 3) y 4)
6).- $\angle CDE + \angle ABE = \angle CBA + \angle ABE$	Sustituyendo 1) en 5)
7).- $\angle CDE \cong \angle CBA$	Cancelando $\angle ABE$ en 6)
8).- $\angle ACE \cong \angle ACE$	Principio de identidad
9).- $\Delta CAB \cong \Delta CED$	Teorema (ALA) 8) 2) 7)
10).- $\therefore AB \cong ED$	Por ser homólogos

EJERCICIO 6



HIPOTESIS:

1) $\angle 3 \cong \angle 4$
2) $\angle 1 \cong \angle 2$

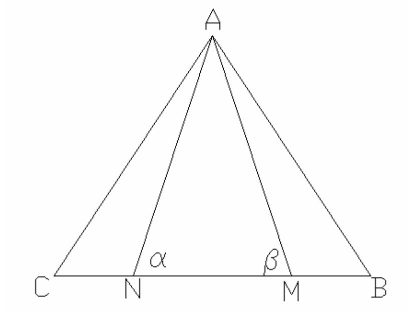
TESIS:

$AB \cong CD$

$AD \cong CB$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $DB \cong DB$	Principio de identidad
2).- $\angle 3 \cong \angle 4$	Hipótesis 1)
3).- $\angle 1 \cong \angle 2$	Hipótesis 2)
4).- $\Delta DAB \cong \Delta BCD$	Teorema (ALA) 3) 1) 2)
5).- $\therefore AB \cong CD$	Por ser homólogos
6).- $\therefore AD \cong CB$	Por ser homólogos

EJERCICIO 7 a)



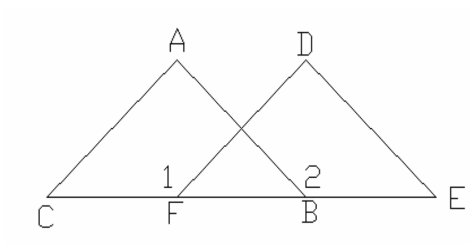
HIPOTESIS:

1) $AB \cong AC$
2) $CN \cong BM$
3) N y M son punto sobre CB

TESIS:
$AN \cong AM$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $AB \cong AC$	Hipótesis 1.
2).- $\angle ACB \cong \angle ABC$	A ángulos iguales se oponen ángulos iguales 1)
3).- $CN \cong BM$	Hipótesis 2)
4).- $\Delta\ ACN \cong \Delta\ ABM$	Teorema (LAL) 1) 2) 3)
5).- $\therefore AN \cong AM$	Por ser homólogos

EJERCICIO 8



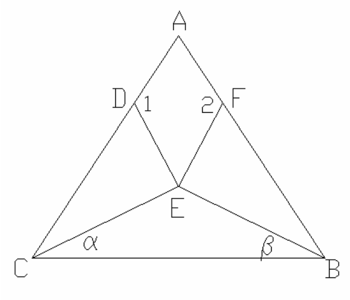
HIPOTESIS:

1) $\angle 1 \cong \angle 2$
2) $AB \cong DF$
3) $CF \cong BE$
4) C, F, B y E son colineales

TESIS:
$AC \cong DE$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle 1 \cong \angle 2$	Hipótesis 1.
2).- $\angle 1 + \angle DFE = 180º$	Por ser ángulos colineales
3).- $\angle 2 + \angle ABC = 180º$	Por ser ángulos colineales
4).- $\angle 1 + \angle DFE = \angle 2 + \angle ABC$	Igualado 2) y 3)
5).- $\angle 2 + \angle DFE = \angle 2 + \angle ABC$	Sustituyendo 1) en 4)
6).- $\angle DFE \cong \angle ABC$	Cancelando $\angle 2$ en 5)
7).- $CF \cong BE$	Hipótesis 3)
8).- $CB = CF + FB$	Suma de segmentos
9).- $FE = BE + FB$	Suma de segmentos
10).- $CB = BE + FB$	Sustitución de 7) en 8)
11).- $FE \cong CB$	Igualando 9) y 10)
12).- $AB \cong DF$	Hipótesis 2)
13).- $\Delta\ CAB \cong \Delta\ FDE$	Teorema (LAL) 11) 6) 12)
14).- $\therefore AC \cong DE$	Por ser homólogos

EJERCICIO 9 a)



HIPOTESIS:

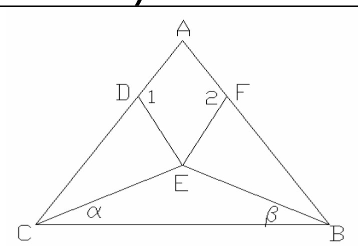
1) DE ≅ EF
2) DC ≅ BF
3) $\angle \alpha \cong \angle \beta$
4) A, D, C y A, F, B son puntos colineales

TESIS:

$\angle 1 \cong \angle 2$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- DE ≅ EF	Hipótesis 1)
2).- DC ≅ BF	Hipótesis 2)
3).- $\angle \alpha \cong \angle \beta$	Hipótesis 3)
4).- EB ≅ EC	A ángulos iguales se oponen lados iguales
5).- Δ DEC ≅ Δ FEB	Teorema (LLL) 1) 2) 4)
6).- $\angle$CDE ≅ $\angle$BFE	Por ser homólogos
7).- $\angle$CDE + $\angle$1 = 180º	Por ser ángulos colineales
8).- $\angle$BFE + $\angle$2 = 180º	Por ser ángulos colineales
9).- $\angle$CDE + $\angle$1 = $\angle$BFE + $\angle$2	Igualación de 7) y 8)
10).- $\angle$CDE + $\angle$1 = $\angle$CDE + $\angle$2	Sustitución de 6) en 9)
11).- $\therefore$ $\angle$1 ≅ $\angle$2	Cancelación de $\angle$CDE en 10)

EJERCICIO 9 b)



HIPOTESIS:

1. AC ≅ AB
2. DC ≅ FB
3. CE ≅ BE

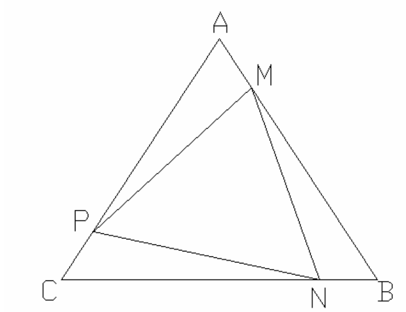
TESIS:

$\angle 1 \cong \angle 2$

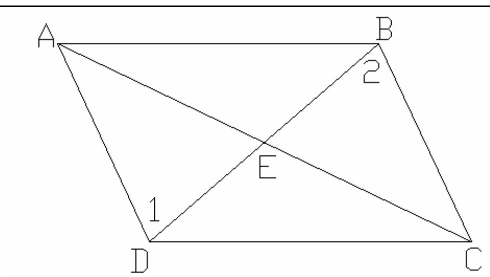
DEMOSTRACION	JUSTIFICACION
1).- DC ≅ FB	Hipótesis
2).- CE≅ BE	Hipótesis
3).- $\angle$ECB ≅ $\angle$EBC	Ángulos opuestos a lados iguales son iguales
4).- AC ≅ AB	Hipótesis
5).- $\angle$ACB ≅ $\angle$ABC	Ángulos opuestos a lados iguales sin iguales
6).- $\angle$ACB = $\angle$ACE + $\angle$ECB	Suma de ángulos
7).- $\angle$ABC = $\angle$ABE + $\angle$EBC	Suma de ángulos
8).- $\angle$ACE + $\angle$ECB = $\angle$ABE + $\angle$EBC	Sustitución de 6) y 7) en 5)
9).- $\angle$ACE + $\angle$ECB = $\angle$ABE + $\angle$ACB	Sustitución de 3) en 8)
10).- $\angle$ACE ≅ $\angle$ABE	Cancelación de $\angle$ECB
11).- $\angle$DEC ≅ $\angle$FBE	Teorema (LAL) 1) 10) 2)
12).- $\angle$EDC ≅ $\angle$EFB	Homólogos
13).- $\angle$EDC + $\angle$1 = 180º	Colineales

14).- $\angle EFB + \angle 2 = 180º$	Colineales
15).- $\angle EDC + \angle 1 = \angle EFB + \angle 2$	Sustitución de 13 en 14
16).- $\angle EDC + \angle 1 = \angle EDC + \angle 2$	Sustitución de 12 en 15
17).- $\angle 1 \cong \angle 2$	Cancelación de $\angle EDC$

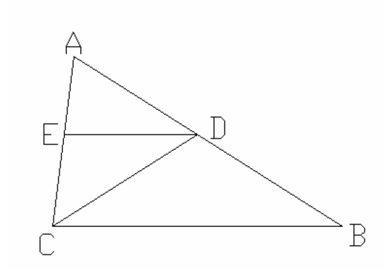
EJERCICIO 10

	**HIPOTESIS**: 1) $AM \cong BN \cong CP$ 2. ABC es un triángulo equilátero **TESIS**: MNP es un triángulo equilátero
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACIÓN:
1).- $AB \cong BC \cong CA$	Hipótesis 2) por ser Δ equilátero
2).- $\angle CAB \cong \angle ABC \cong \angle BCA$	Hipótesis 2) por ser Δ equilátero
3).- $AM \cong BN \cong CP$	Hipótesis 1)
4).- $AB = AM + MB$	Suma de segmentos
5).- $BC = BN + NC$	Suma de segmentos
6).- $CA = CP + PA$	Suma de segmentos
7).- $AM + MB = BN + NC = CP + PA$	Sustitución de 4) 5) y 6) en 1)
8).- $CP + MB = CP + NC = CP + PA$	Sustitución de 3) en 7)
9).- $MB \cong NC \cong PA$	Cancelación de CP en 8)
10).- $\Delta AMP \cong \Delta BNM \cong \Delta CPN$	Teorema (LAL) 9) 2) 3)
11).- $PM \cong MN \cong PN$	Por ser homólogos
12).- $\therefore$ Δ MNP es equilátero por tener tres lados iguales 11)	

EJERCICIO 11

	**HIPOTESIS**: 1) $\angle 1 \cong \angle 2$ 2) E es punto medio de BD **TESIS**: $AD \cong BC$ $AB \cong CD$
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle 1 \cong \angle 2$	Hipótesis 1)
2).- $DE \cong EB$	Hipótesis 2) de punto medio
3).- $\angle AED \cong \angle BEC$	Por ser opuestos por el vértice
4).- $\Delta AED \cong \Delta BEC$	Teorema ALA, 1), 2) y 3)
5).- $\therefore AD \cong BC$	Por ser homólogos
6).- $BD \cong BD$	Principio de identidad
7).- $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	Teorema LAL, 5), 1) y 6)
8).- $\therefore AB \cong CD$	Por ser homólogos

EJERCICIO 12



HIPOTESIS:

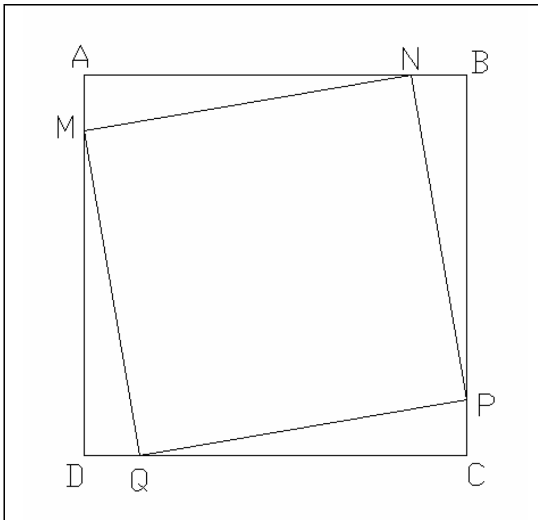
1) D es punto medio de AB
2) $\angle B \cong \angle DCB$
3) ED es bisectriz del $\angle ADC$

TESIS:

$AE \cong EC$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle B \cong \angle DCB$	Hipótesis 2)
2).- $AD \cong DB$	Hipótesis 1) de punto medio
3).- $\angle ADE \cong \angle EDC$	Hipótesis 3) de bisectriz
4).- $CD \cong DB$	A ángulos iguales se oponen lados iguales
5).- $CD \cong AD$	Sustitución de 2) en 4)
6).- $ED \cong ED$	Principio de identidad
7).- $\Delta ADE \cong \Delta EDC$	Teorema LAL, 6), 3) y 5)
8).- $\therefore AE \cong EC$	Por ser homólogos

EJERCICIO 13



HIPOTESIS:

1) $AB \perp BC$ en B
2) $AB \perp AD$ en A
3) $AD \perp DC$ en D
4) $BC \perp DC$ en C
5) $AB \cong BC \cong CD \cong DA$
6) $NB \cong PC \cong QD \cong MA$

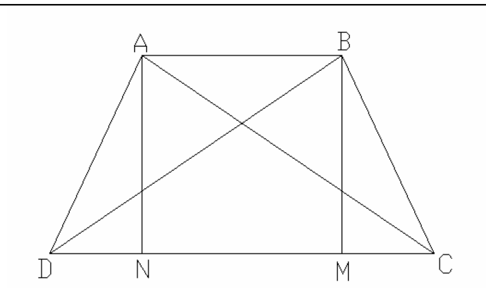
TESIS:

$NM \cong MQ \cong QP \cong PN$
$MN \perp NP$ en N
$MN \perp MQ$ en M
$MQ \perp QP$ en Q
$NP \perp QP$ en P

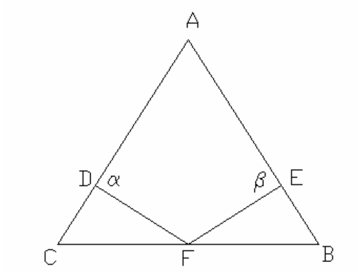
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $AB \cong BC \cong CD \cong DA$	Hipótesis 5)
2).- $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$	Hipótesis 1), 2), 3) y 4)
3).- $NB \cong PC \cong QD \cong MA$	Hipótesis 6)
4).- $AB = AN + NB$	Suma de segmentos
5).- $BC = BP + PC$	Suma de segmentos
6).- $CD = CQ + QD$	Suma de segmentos
7).- $DA = DM + MA$	Suma de segmentos
8).- $AN + NB = BP + PC =$ $CQ + QD = DM + MA$	Sustitución de 4, 5, 6 y 7 en 1)
9).- $AN + NB = BP + NB =$ $CQ + NB = DM + NB$	Sustitución de 3) en 8)
10).- $AN \cong BP \cong CQ \cong DM$	Cancelación de NB

11).- Δ ANM $\cong$ Δ BPN $\cong$ Δ CQP $\cong$ Δ DMQ	Teorema LAL, 3), 2) y 10)
12).- NM $\cong$ MQ $\cong$ QP $\cong$ PN	Por ser homólogos
13).- $\angle$ DMQ $\cong$ $\angle$ ANM $\cong$ $\angle$ BPN $\cong$ $\angle$ CQP	Por ser homólogos
14).- $\angle$ DQM $\cong$ $\angle$ AMN $\cong$ $\angle$ BNP $\cong$ $\angle$ CPQ	Por ser homólogos
15).- MP $\cong$ MP	Principio de identidad
16).- Δ MNP $\cong$ Δ PQM	Teorema LLL, 12) y 15)
17).- $\angle$ MNP $\cong$ $\angle$ PQM	Por ser homólogos
18).- QN $\cong$ QN	Principio de identidad
19).- Δ QMN $\cong$ Δ NPQ	Teorema LLL, 12) y 18)
20).- $\angle$ NMQ $\cong$ $\angle$ NPQ	por ser homólogos
21).- $\angle$ DQM + $\angle$ PQM + $\angle$ CQP = 180	Por ser colineales
22).- $\angle$ AMN + $\angle$ NMQ + $\angle$ DMQ = 180	Por ser colineales
23).- $\angle$ AMN + $\angle$ PQM + $\angle$ DMQ = 180	Sustitución de 13 y 14 en 21
24).- $\angle$ AMN + $\angle$ NMQ + $\angle$ DMQ = $\angle$ AMN + $\angle$ PQM + $\angle$ DMQ	Igualación de 22 y 23
25).- $\angle$ NMQ $\cong$ $\angle$ PQM	cancelación
26). $\angle$ NMQ $\cong$ $\angle$ PQM $\cong$ $\angle$ MNP $\cong$ $\angle$ NPQ $\therefore$ MNPQ es un cuadrado ya que tiene 4 ángulos y 4 lados iguales 26), 12) y por lo tanto MN $\perp$ NP, MN $\perp$ MQ, MQ $\perp$ QP y NP $\perp$ QP	Sustitución de 17 Y 20 en 25

EJERCICIO 14

	**HIPOTESIS**: 1) AN $\perp$ DC en N 2) BM $\perp$ DC en M 3) AN $\cong$ BM 4) DM $\cong$ CN **TESIS**: AC $\cong$ BD
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle$ ANC = 90° = $\angle$ BMD	Hipótesis 1) y 2)
2).- AN $\cong$ BM	Hipótesis 3)
3).- DM $\cong$ CN	Hipótesis 4)
4).- Δ ACN $\cong$ Δ BDM	Teorema (LAL) 3), 1) y 2)
5).- $\therefore$ AC $\cong$ BD	Por ser homólogos

EJERCICIO 15

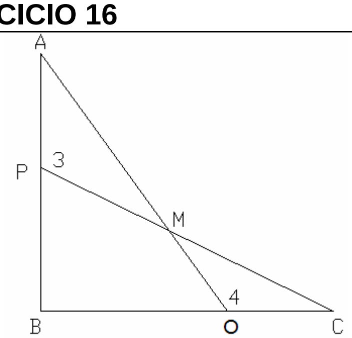


HIPOTESIS:
1) AC ≅ AB
2) F es punto medio de BC
3) AD ≅ AE

TESIS:
∠α ≅ ∠β

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- AC ≅ AB	Hipótesis 1)
2).- AD ≅ AE	Hipótesis 2)
3).- ∠C ≅ ∠B	A lados iguales se oponen ángulos iguales 1)
4).- AC = AD + DC	Suma de segmentos
5).- AB = AE + EB	Suma de segmentos
6).- AD + DC = AE + EB	Sustitución de 4 y 5 en 1)
7).- AE + DC = AE + EB	Sustitución de 2) en 6)
8).- DC ≅ EB	Cancelación de AE en 7)
9).- CF ≅ FB	Hipótesis 2) de punto medio
10).- ∆ CDF ≅ ∆ BEF	Teorema LAL, 8), 3) y 9)
11).- ∠ CDF ≅ ∠BEF	Por ser homólogos
12).- ∠ α + ∠ CDF = 180	Por ser colineal
13).- ∠ β + ∠BEF = 180	Por ser colineal
14).- ∠α + ∠CDF = ∠β + ∠ BEF	Igualando 12 y 13
15).- ∠α + ∠BEF = ∠ β + ∠BEF	Sustitución de 11) en 14)
16).- ∴ ∠ α ≅ ∠ β	Cancelación de ∠BEF en 15)

EJERCICIO 16



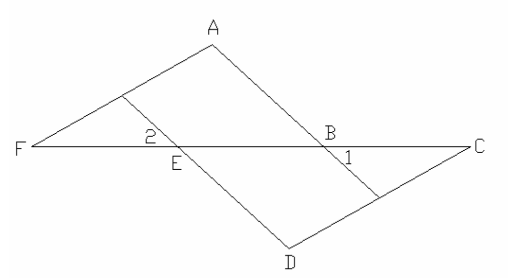
HIPOTESIS:
1) ∠3 ≅ ∠4
2) AB ⊥ BC en B
3) PB ≅ QB
4) AQ y PC se intersectan en M

TESIS:
AM ≅ CM
MP ≅ MQ

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- ∠3 ≅ ∠ 4	Hipótesis 1)
2).- PB ≅ QB	Hipótesis 3)
3).- ∠BPQ ≅ ∠BQP	A lados iguales 2) se oponen ángulos iguales
4).- ∠3 + ∠MPQ + ∠BPQ = 180	Por ser colineal
5).- ∠4 + ∠MQP + ∠BQP = 180	Por ser colineal
6).- ∠3 + ∠MPQ + ∠BPQ = ∠4 + ∠MQP + ∠BQP	Igualación de 4) y 5)
7).- ∠4 + ∠MPQ + ∠BQP = ∠4 + ∠MQP + ∠BQP	Sustitución de 1) y 3) en 6)
8).- ∠MPQ ≅ ∠MQP	Cancelación 7)
9).- PM ≅ QM ∴ MP ≅ MQ	A ángulos iguales 8) se oponen lados iguales
10).- ∠AMP ≅ ∠CMQ	Por ser opuestos por el vértice

11).- $\Delta AMP \cong \Delta CMQ$	Teorema ALA, 1), 9) y 10)
12).- $\therefore\ AM \cong CM$	Por ser homólogos

EJERCICIO 17



HIPOTESIS:

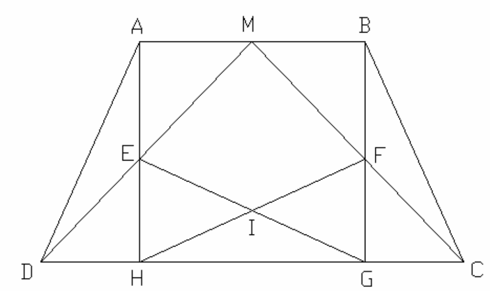
1) $AB \cong ED$
2) $\angle 1 \cong \angle 2$
3) $FE \cong BC$

TESIS:

$AF \cong DC$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $AB \cong ED$	Hipótesis 1)
2).- $\angle 1 \cong \angle 2$	Hipótesis 2)
3).- $FE \cong BC$	Hipótesis 3)
4).- $\angle ABF \cong \angle 1$	Por ser opuestos por el vértice
5).- $\angle DEC \cong \angle 2$	Por ser opuestos por el vértice
6).- $\angle ABF \cong \angle DEC$	Sustitución de 4) y 5) en 2)
7).- $FB = FE + EB$	Suma de segmentos
8).- $EC = BC + EB$	Suma de segmentos
9).- $FB = BC + EB$	Sustitución de 3) en 7)
10).- $EC \cong FB$	Igualación de 8) y 9)
11).- $\Delta ABF \cong \Delta DEC$	Teorema LAL, 1), 6) y 10)
12).- $\therefore\ AF \cong DC$	Por ser homólogos

EJERCICIO 18



HIPOTESIS:

1) M es punto medio de AB
2) $AD \cong BC$
3) $DH \cong GC$
4) $AH \perp DC$ en H
5)$BG \perp DC$ en G
6) AH y DM se intersectan en E
7) BG y MC se intersectan en F
8) EG y FH se intersectan en I

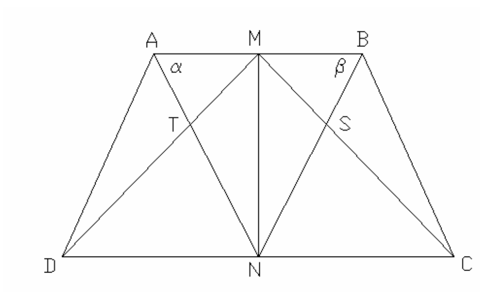
TESIS:

$EG \cong FH$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $AD \cong BC$	Hipótesis 2)
2).- $DH \cong GC$	Hipótesis 3)
3).- $\angle AHD = \angle BGC = 90°$	Hipótesis 4) y 5)
4).- $\Delta AHD \cong \Delta BGC$	Teorema LLA, HC, 1), 2) y 3)
5).- $AH \cong BG \therefore AB \parallel DC$	Por ser homólogos
6).- $\angle HAB \cong \angle ABG$	Ya que $AB \parallel DC$
7).- $\angle DAH \cong \angle CBG$	Por ser homólogos
8).- $\angle DAB = \angle DAH + \angle HAB$	Suma de ángulos
9).- $\angle ABC = \angle ABG + \angle CBG$	Suma de ángulos

10).- $\angle DAB = \angle ABG + \angle CBA$	Sustitución de 6) y 7) en 8)
11).- $\angle ABC \cong \angle DAB$	Igualación de 9) y 10)
12).- $AM \cong MB$	Hipótesis 1) de punto medio
13).- $\Delta DAM \cong \Delta CBM$	Teorema LAL 1), 11) y 12)
14).- $MD \cong MC$	Por ser homólogos
15).- $\angle MDC \cong \angle MCD$	A lados iguales 14) se oponen ángulos iguales
16).- $\Delta DEH \cong \Delta CFG$	Teorema ALA, 15), 2) y 3)
17).- $HE \cong GF$	Por se homólogos 16)
18).- $\angle EHG = \angle FGH = 90°$	Hipótesis 4) y 5)
19).- $HG \cong HG$	Principio de identidad
20).- $\Delta HEG \cong \Delta GFH$	Teorema LAL 17), 18) y 19)
21).- $\therefore EG \cong FH$	Por ser homólogos

EJERCICIO 19

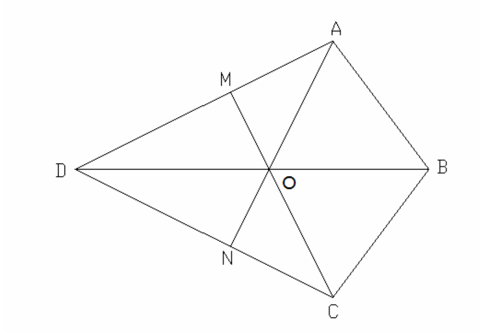
<table>
<tr><td>


</td><td>

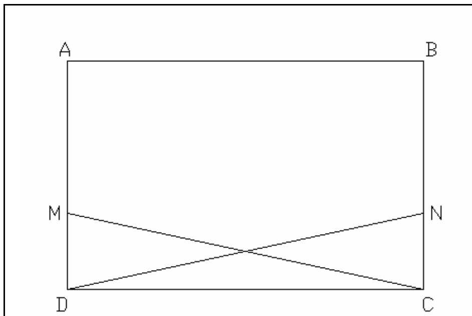
HIPOTESIS:
1) M y N son puntos medios de AB y DC
2) $\angle\alpha \cong \angle\beta$
3) $AD \cong BC$
4) AN y DM se intersectan en T
5) BN y MC se intersectan en S

TESIS:
$AT \cong BS$
</td></tr>
<tr><td>DEMOSTRACIÓN</td><td>JUSTIFICACION</td></tr>
<tr><td>1).- $\angle\alpha \cong \angle\beta$</td><td>Hipótesis 2)</td></tr>
<tr><td>2).- $AN \cong NB$</td><td>A ángulos iguales se oponen lados iguales</td></tr>
<tr><td>3).- $AD \cong BC$</td><td>Hipótesis 3)</td></tr>
<tr><td>4).- $DN \cong NC$ y $AM \cong MB$</td><td>Hipótesis 1)</td></tr>
<tr><td>5).- $\Delta ADN \cong \Delta BCN$</td><td>Teorema LLL, 2), 3) y 4)</td></tr>
<tr><td>6).- $\angle DAN \cong \angle CBN$</td><td>Por ser homólogos</td></tr>
<tr><td>7).- $\angle DAM = \angle DAN + \angle\alpha$</td><td>Suma de ángulos</td></tr>
<tr><td>8).- $\angle CBM = \angle CBN + \angle\beta$</td><td>Suma de ángulos</td></tr>
<tr><td>9).- $\angle DAM = \angle CBN + \angle\beta$</td><td>Sustitución de 1) y 6) en 7)</td></tr>
<tr><td>10).- $\angle CBM \cong \angle DAM$</td><td>Igualación de 8) y 9)</td></tr>
<tr><td>11).- $\Delta DAM \cong \Delta CBM$</td><td>Teorema LAL, 3), 10) y 4)</td></tr>
<tr><td>12).- $\angle AMD \cong \angle BMC$</td><td>Por ser homólogos</td></tr>
<tr><td>13).- $\Delta AMT \cong \Delta BMC$</td><td>Teorema ALA, 1), 4) y 12)</td></tr>
<tr><td>14).- $\therefore AT \cong BS$</td><td>Por ser homólogos</td></tr>
</table>

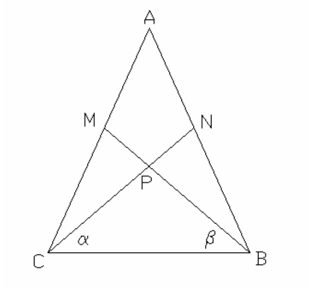
EJERCICIO 20

	**HIPOTESIS**: 1) OM ⊥ AD en m 2) ON ⊥ CD en N 3) MO ≅ NO 4) MC, AN y DB se intersectan en O **TESIS**: AB ≅ CB
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- ∠OMA = ∠OMD = ∠OND = ∠ONC = 90°	Hipótesis 1) y 2)
2).- MO ≅ ON	Hipótesis 3)
3).- ∠MOA ≅ ∠NOC	Por ser opuestos por el vértice
4).- ∆AOM ≅ ∆CON	Teorema ALA, 3), 2) y 1)
5).- AO ≅ CO	Por ser homólogos
6).- OD ≅ OD	Principio de identidad
7).- ∆MOD ≅ ∆NOD	Teorema LLA 6), 2) y 1)
8).- ∠MOD ≅ ∠NOD	Por ser homólogos
9).- ∠AOB ≅ ∠NOD	Por ser opuestos por el vértice
10).- ∠COB ≅ ∠MOD	Por ser opuestos por el vértice
11).- ∠AOB ≅ ∠COB	Sustitución de 9) y 10) en 8)
12).- OB ≅ OB	Principio de identidad
13).- ∆AOB ≅ ∆COB	Teorema LAL, 5), 11) y 12)
14).- ∴ AB ≅ CB	Por ser homólogos

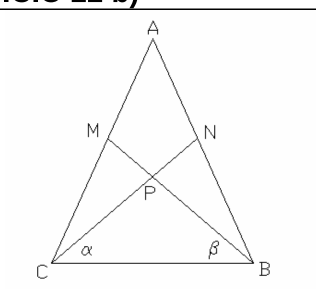
EJERCICIO 21

	**HIPOTESIS**: 1) AD ⊥ DC en D 2) BC ⊥ DC en C 3) MD ≅ CN **TESIS**: CM ≅ DN
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- ∠ADC = ∠BCD = 90°	Hipótesis 1) y 2)
2).- MD ≅ CN	Hipótesis 3)
3).- DC ≅ DC	Principio de identidad
4).- ∆DMC ≅ ∆CND	Teorema LAL, 2), 1) y 3)
5).- ∴ CM ≅ DN	Por ser homólogos

EJERCICIO 22 a)

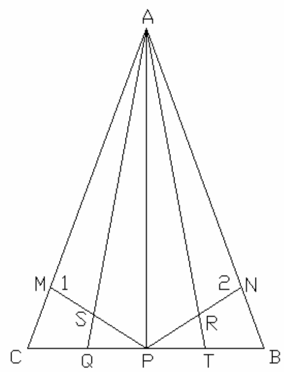
	**HIPOTESIS**: 1) $AC \cong AB$ 2) $\angle \alpha \cong \angle \beta$ 3) MB y CN se intersectan en P **TESIS**: $MP \cong PN$ $AM \cong AN$
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $\angle \alpha \cong \angle \beta$	Hipótesis 2)
2).- $CP \cong BP$	A ángulos iguales se oponen lados iguales
3).- $AC \cong AB$	Hipótesis 1)
4).- $\angle ACB \cong \angle ABC$	A lados iguales 5) se oponen ángulos iguales
5).- $\angle ACB = \angle MCP + \angle \alpha$	Suma de ángulos
6).- $\angle ABC = \angle NBP + \angle \beta$	Suma de ángulos
7).- $\angle ACB = \angle MCP + \angle \beta$	Sustitución de 1) en 5)
8).- $\angle MCP + \angle \beta = \angle NBP + \angle \beta$	Igualación de 6) y 7) en 4)
9).- $\angle MCP \cong \angle NBP$	Cancelación de $\angle \beta$ en 8)
10).- $\angle MPC \cong \angle NPB$	Por ser opuestos por el vértice
11).- $\Delta MPC \cong \Delta NPB$	Teorema ALA, 10), 2) y 9)
12).- $\therefore$ $MP \cong PN$	Por ser homólogos
13).- $MC \cong NB$	Por ser homólogos
14).- $AC = AM + MC$	Suma de segmentos
15).- $AB = AN + NB$	Suma de segmentos
16).- $AC = AM + NB$	Sustitución de 13) en 14)
17).- $AM + NB = AN + NB$	Igualación de 15) y 16) en 3)
18).- $AM \cong AN$ $\therefore$ $AM \cong AN$	Cancelación de NB en 17

EJERCICIO 22 b)

	**HIPOTESIS**: 1) $AC \cong AB$ 2) $CP \cong BP$ 3) MB y CN se intersectan en P **TESIS**: $MP \cong PN$ $AM \cong AN$
DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- $AC \cong AB$	Hipótesis 1)
2).- $\angle ACB \cong \angle ABC$	A 2 lados iguales se oponen 1) ángulos iguales
3).- $CP \cong BP$	Hipótesis 2)
4).- $\angle \alpha \cong \angle \beta$	A lados iguales se oponen 3) ángulos iguales
5).- $\angle ACB = \angle \alpha + \angle MCP$	Suma de ángulos
6).- $\angle ABC = \angle \beta + \angle NBP$	Suma de ángulos
7).- $\angle \alpha + \angle MCP = \angle \beta + \angle NBP$	Igualación de 5) y 6)
8).- $\angle \beta + \angle MCP = \angle \beta + \angle NBP$	Sustitución de 4) en 7)
9).- $\angle MCP \cong \angle NBP$	Por cancelación de $\angle \beta$
10).- MB y CN se intersectan	Hipótesis 3)
11).- $\angle MPC \cong \angle BPN$	Por ser opuestos por el vértice

12).- $\Delta CMP \cong \Delta NBP$	Criterio ALA, 9), 3) y 11)
13).- $\therefore$ $MP \cong PN$	Por ser homólogos
14).- $MC \cong NB$	Por ser homólogos
15).- AC = AM + MC	Suma de segmentos
16).- AB = AN + NB	Suma de segmentos
17).- AM + MC = AN + NB	Igualación de 15) y 16)
18).- AM + MC = AN + MC	Sustitución de 14) en 17)
19).- $\therefore$ $AM \cong AN$	Cancelación de MC

EJERCICIO 23



HIPOTESIS:

1) $< 1 \cong\ <2$
2) $< MPC \cong\ < NPB$
3) $MP \cong PN$
4) Q y T son puntos medios de CP y PB respectivamente

TESIS:

AP es bisectriz del $\angle QAT$ y $\angle MPN$
$MS \cong RN$

DEMOSTRACIÓN	JUSTIFICACION
1).- < 1 = <2	Hipótesis 1)
2).- MP = PN	Hipótesis 3)
3).- $\angle MPC = \angle NPB$	Hipótesis 2)
4).- $\angle 1 + \angle CMP = 180$	Por ser colineal
5).- $\angle 2 + \angle BNP = 180$	Por ser colineal
6).- $\angle 1 + \angle CMP = \angle 2 + \angle BNP$	Igualación de 4) y 5)
7).- $\angle 2 + \angle CMP = \angle 2 + \angle BNP$	Sustitución de 1) en 6)
8).- $\angle CMP = \angle BNP$	Cancelación de $\angle 2$ en 7)
9).- $\Delta MPC \cong \Delta NPB$	Teorema ALA, 3), 2) y 8)
10).- AP = AP	Principio de identidad
11).- $\Delta AMP \cong \Delta ANP$	Teorema LLA, 10), 2) y 1)
12).- $\angle APM = \angle APN$ AP biseca al $\angle MPN$	Por ser homólogos
13).- CP = PB	Por ser homólogos
14).- CQ = QP y PT = TB	Hipótesis 4)
15).- CP = CQ + QP	Suma de segmentos
16).- PB = PT + TB	Suma de segmentos
17).- CP=CQ+ QP= QP+ QP= 2QP	Sustitución de 14) en 15)
18).- PB = PT+ TB= PT + PT = 2PT	Sustitución de 14) en 16)
19).- 2QP = 2PT	Sustitución de 17)y 18) en 13
20).- QP = PT	Cancelación de 19)
21).- $\angle CPA = \angle MPC + \angle APM$	Suma de ángulos
22).- $\angle BPA = \angle NPB + \angle APN$	Suma de ángulos
23).- $\angle CPA = \angle NPB + \angle APN$	Sustitución de 3) y 12) en 21)
24).- $\angle BPA = \angle CPA$	Igualación de 22) y 23)
25).- $\Delta QAP \cong \Delta TAP$	Teorema LAL, 20), 24) y 10)
26).- $\angle QAP = \angle TAP$	Por ser homólogos

$\therefore$ AP es bisectriz del $\angle$ QAT	
27).- $\angle$ SQP = $\angle$ RTP	Por ser homólogos
28).- Δ SQP $\cong$ Δ RTP	Teorema ALA, 27), 20) y 24)
29).- SP = PR	Por ser homólogos
30).- MP = MS + SP	Suma de segmentos
31).- PN = PR + RN	Suma de segmentos
32).- MP = MS + PR	Sustitución de 29) en 30)
33).- MS + PR = PR +RN	Sustitución de 31) y 32) en 2)
34).- $\therefore$ MS $\cong$ RN	Cancelación de PR