21ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Saltillo, Coahuila, 13 de noviembre de 2007
Segundo Día

Problema 4.
Para un entero positivo n se definen: n_1 como la suma de los dígitos de n, n_2 como la suma de los dígitos de n_1 y n_3 como la suma de los dígitos de n_2. Por ejemplo para $n = 199$, $n_1 = 199_1 = 19$, $n_2 = 199_2 = 10$, y $n_3 = 199_3 = 1$.

Encuentra todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que:

$$m + n = 2007$$
$$m_3 + n_3 = 2007_3$$

Problema 5.
En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

Problema 3.
Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2 \angle ABM$.