COMITÉ ESTATAL DE OLIMPIADAS DE MATEMATICAS
21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
EXAMEN FINAL
Sábado 6 de octubre de 2007

INSTRUCCIONES:
1.- Cada problema vale 7 puntos
2.- Tiempo máximo para resolver el examen 4:30 horas
3.- Tiempo para preguntar: Sólo la primera hora, a partir de que te entregan el examen.
4.- Contesta problemas diferentes en hojas diferentes y escribe por un solo lado de la hoja.

Problema 10

Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

Problema 11

Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA} \bullet \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

Problema 12

Considera un octágono convexo que no tenga dos de sus diagonales paralelas. Prueba que existen dos diagonales del octágono (o sus prolongaciones) tales que forman un ángulo menor o igual a 9 grados.

COMITÉ ESTATAL DE OLIMPIADAS DE MATEMATICAS
21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
EXAMEN FINAL
Sábado 6 de octubre de 2007

Solución 10

Sea la progresión a, a + d, a + 2d, . . . , a + 99d, entonces tenemos que hallar:

$S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + ... + (a + 99d)^2 = 100a^2 + 2ad\,(1 + 2 + ... + 99) + d^2\,(1^2 + 2^2 + ... + 99^2)$.

Para calcular a y d resolvemos el sistema: $\begin{cases} (a + a + 99d)50 = -1 \\ (a + d + a + 99d)25 = 1 \end{cases}$ que operado y resuelto sale:

a = -2.98;   d = 0.06.

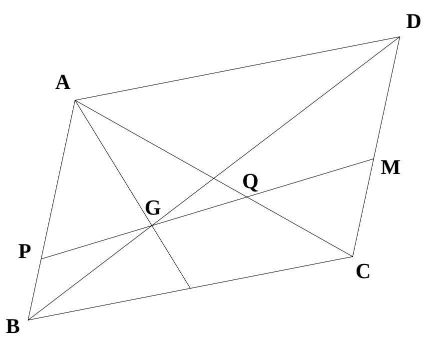
El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones de primer y segundo orden.

$$1 + 2 + . . . + 99 = 4950; \quad 1^2 + 2^2 + . . . + 99^2 = 328350.$$

El resultado final es S = 299.98

Solución 11

Dupliquemos el triángulo trazando AD paralela a BC y CD paralela a BA como muestra la figura y tomemos la longitud del lado AB como unidad. Llamando M a la intersección de CD con la recta PQ y x = PB; 1 – x = AP, tenemos:



Por semejanza de ΔAPQ y ΔCMQ: $\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{PA} = \frac{MC}{1-x}$

Por semejanza de ΔGPB y ΔGMD: $\frac{PB}{MD} = \frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}$.

Luego: MD = 2x $\Rightarrow$ MC = 1 – 2x.
Sustituyendo en el primer miembro de la relación del enunciado queda:

$$\frac{PB}{PA} \bullet \frac{QC}{QA} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \ge 0$$

Relación válida para cualquier x.
La igualdad se alcanza para $PB = x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow MC = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$ PQ paralela al lado BC.