COMITÉ ESTATAL DE OLIMPIADAS DE MATEMATICAS
21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
EXAMEN GEOMETRIA, NUMEROS Y DESIGUALDADES
Sábado 11 de agosto de 2007

INSTRUCCIONES:
1.- Cada problema vale 7 puntos
2.- Tiempo máximo para resolver el examen 4:30 horas
3.- Tiempo para preguntar: Sólo la primera hora, a partir de que te entregan el examen.
4.- Contesta problemas diferentes en hojas diferentes y escribe por un solo lado de la hoja.

Problema 7

Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de razón *d*. Probar que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Problema 8

Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado, ni cubo perfecto.

Problema 9

Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple:

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc$$

Solución 7a

La desigualdad dada puede escribirse como

$$10a_2^3 \le a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3.$$

y sumando $6a_2^3$ a ambos miembros se convierte en

$$a_2^3 \le \frac{1}{16}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 6a_2^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Por otro lado como a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 están en progresión aritmética, entonces

$$\binom{4}{0}a_0 + \binom{4}{1}a_1 + \binom{4}{2}a_2 + \binom{4}{3}a_3 + \binom{4}{4}a_4 = (a_0 + a_4)\binom{4}{0} + (a_1 + a_3)\binom{4}{1} + \binom{4}{2}a_2 =$$

$$2a_2\binom{4}{0} + 2a_2\binom{4}{1} + a_2\binom{4}{2} = a_2\left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = 2^4 a_2.$$

Aplicando la desigualdad de Jensen a la función $f(t) = t^3$, convexa en $(0, +\infty)$, con $p_k = \binom{4}{k}\frac{1}{2^k}, 0 \le k \le 4$ resulta

$$f\left(\sum_{k=0}^{4} p_k a_k\right) \le \sum_{k=0}^{4} p_k f(a_k)$$

o equivalentemente,

$$a_2^3 \le \frac{1}{2^k}\left[\binom{4}{0}a_0^3 + \binom{4}{1}a_1^3 + \binom{4}{2}a_2^3 + \binom{4}{3}a_3^3 + \binom{4}{4}a_4^3\right] = \frac{1}{16}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 6a_2^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Obsérvese que la igualdad tiene lugar cuando los cinco números son iguales y hemos terminado.

Solución 7b

Llamando *a* al término central y *d* a la diferencia, la progresión es $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ y tenemos:

$$a_0^3 = (a-2d)^3 = a^3 - 6a^2d + 12ad^2 - 8d^3$$
$$a_4^3 = (a+2d)^3 = a^3 + 6a^2d + 12ad^2 + 8d^3$$
$$4a_1^3 = 4(a-d)^3 = 4a^3 - 12a^2d + 12ad^2 - 4d^3$$
$$4a_3^3 = 4(a+d)^3 = 4a^3 + 12a^2d + 12ad^2 + 4d^3$$

sumando:

$$a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3 = 10a^3 + 48ad^2$$

dividiendo por 10 queda

$$\frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right) - a^3 = 4{,}8ad^2 \geq 0$$

con independencia del valor de d.

Solución 7c

Como se trata de cinco términos en progresión aritmética, se tiene

$$a_0 + a_4 = 2a_2 = a_1 + a_3$$

o también

$$a_0 a_4 = \left(a_2 - 2d\right)\left(a_2 + 2d\right).$$

Entonces

$$a_0^3 + a_4^3 = \left(a_0 + a_4\right)^3 - 3a_0a_4\left(a_0 + a_4\right) = 8a_2^3 - 6a_0a_4a_2,$$

y

$$4\left(a_1^3 + a_3^3\right) = a\left[\left(a_1 + a_3\right)^3 - 3a_1a_3\left(a_1 + a_3\right)\right] = 4\left(8a_2^3 - 6a_1a_0a_2\right).$$

Entonces, lo que hay que probar es

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}\left(8a_2^3 - 6a_0a_1a_2 + 32a_2^3 - 24a_1a_3a_2\right)$$

cuyo segundo miembro es

$$4a_2^3 - \frac{6}{10}a_2\left(a_0a_4 + 4a_1a_3\right);$$

trasponiendo términos, la desigualdad a probar se escribe como

$$\frac{3}{5}a_2\left(a_2^2 - 4d^2 + 4a_2^2 - 4d^2\right) \leq 3a_2^3 \Leftrightarrow 3a_2^3 - \frac{24}{5}d^2 \leq 3a_2^3 \Leftrightarrow -\frac{24}{5}d^2 \leq 0$$

la última desigualdad es cierta y hemos terminado.

Solución 8

Si el producto $N=(n-1)n(n+1)(n+2)$ fuese un cuadrado, basta ponerlo en la forma

$$N=(n-1)n(n+1)(n+2)=\left(n^2+n-2\right)\left(n^2+n\right)=\left(n^2+n-1\right)^2-1$$

de donde se sigue una contradicción (no hay dos cuadrados consecutivos).

Si N fuese cubo perfecto, podemos suponer que $n>2$ (si $n=2$, $N=24$).

Distinguimos ahora dos casos:

a) n impar, entonces n es primo con los otros tres factores y si N es cubo perfecto, también lo es

$$M=(n-1)(n+1)(n+2)=n^3+2n^2-n-2$$

pero si $n>2 \Rightarrow n^3<n^3+2n^2-n-2<(n+1)^3$ y ya tenemos la contradicción pues entre dos cubos consecutivos no puede haber otro cubo.

b) si n es par, $n+1$ es impar y por tanto $n+1$ es primo con el producto

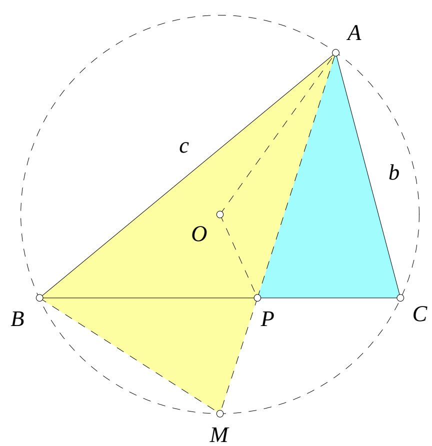
$$M=(n-1)n(n+2)=n^3+n^2-2n$$

que también debe ser cubo perfecto.

Finalmente, como $n>2 \Rightarrow n^3<n^3+n^2-2n<(n+1)^3$ se sigue la contradicción.

Solución 9

Prolongamos AP hasta que corte en M al circuncírculo. Los triángulos ABM y APC son semejantes al tener dos ángulos iguales. ($\angle ACB = \angle AMB$ por inscritos en el mismo arco y $\angle BAN = \angle CAN$ por bisectriz).



Entonces:

$$\frac{c}{AM}=\frac{AP}{b} \Leftrightarrow bc=AM\cdot AP$$

como $AM = AP + PM$, queda:

$$bc=AP\left(AP+PM\right)=AP^2+AP\cdot PM$$

$AP\cdot PM$ es la potencia de P respecto de la circunferencia circunscrita y su valor es $OA^2 - OP^2$ sólo queda sustituir y resulta:

$$bc=AP^2+OA^2-OP^2$$