COMITÉ ESTATAL DE OLIMPIADAS DE MATEMATICAS
21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
EXAMEN DE COMBINATORIA
Viernes 27 de julio de 2007

INSTRUCCIONES:
1.- Cada problema vale 7 puntos
2.- Tiempo máximo para resolver el examen 4:30 horas
3.- Tiempo para preguntar: Sólo la primera hora, a partir de que te entregan el examen.
4.- Contesta problemas diferentes en hojas diferentes y escribe por un solo lado de la hoja.

Problema 4
Pruebe que de cualesquiera 25 números enteros positivos distintos, podemos escoger dos cuya suma y diferencia no coinciden con cualquiera de los 23 restantes.

Problema 5
Determine todos los números primos p y q, para los cuales pq divide al producto

$$(5^p - 2^p)(5^q - 2^q).$$

Problema 6
Comenzando en (1, 1), una piedra es movida en el plano coordenado de acuerdo a las siguientes reglas:

a) De cada punto (a, b), la piedra puede moverse a $(2a, b)$ o $(a, 2b)$.
b) De cada punto (a, b) la piedra puede moverse a $(a - b, b)$ si $a > b$, o a $(a, b - a)$ si $a < b$.

¿Para que enteros positivos x, y puede la piedra moverse a (x, y)?

Solución 4

Asumir que existen 25 números para los cuales la característica no se cumple. A continuación los ordenamos:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{25}$$

Entonces x_{25} es el mas grande, por lo tanto $x_{25} + x_k$ no esta en el conjunto de los 25 números para cualquier k. Por lo tanto, para que las diferencias estén en el conjunto, solo podemos tener:

$$x_{25} - x_1 = x_{24},\ x_{25} - x_2 = x_{23},\ \ldots,\ x_{25} - x_{12} = x_{23},$$

Se sigue lo anterior para $k > 1$, $x_{24} + x_k > x_{25}$; por lo tanto, $x_{24} - x_k$ esta en el conjunto. Pero $x_{24} - x_2 < x_{23}$, porque $x_{23} + x_2 = x_{25}$. También $x_{24} - x_2 \leq x_{22}$, $x_{24} - x_3 \leq x_{21}$, ... $x_{24} - x_{12} \leq x_{11}$, ... , $x_{24} - x_{22} \leq x_1$ (hasta aquí se tiene el hecho que $x_{24} - x_{12} = x_{12}$, entonces la suma y la diferencia de x_{24} y x_{12} no son iguales al resto de los números). Se tiene que ni la suma ni la diferencia de x_{24} y x_{23} están en el conjunto, una contradicción que resuelve el problema.

Solución 5

Las soluciones son $(p, q) = (3, 3), (3, 13)$, o $(13, 3)$. Es fácil comprobar que éstas son soluciones.

Ahora demostramos que son las únicas soluciones. Por simetría, podemos asumir que $p \leq q$. Entonces $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ es impar, tenemos que $q \leq p \leq 3$.

Observamos que si un primo k divide a $5^k - 2^k$, entonces por el pequeño Teorema de Fermat, tenemos que $3 \equiv 5 - 2 \equiv 5^k - 2^k \pmod{k}$, o $k = 3$.

Suponemos que $p > 3$. Entonces tenemos que si p divide a $5^q - 2^q$, o $5^q \equiv 2^q \pmod{p}$. Por el Teorema de Fermat, tenemos que $5^p - 1 \equiv 2^p - 1 \pmod{p}$.

Para $q \geq p$, $\mathrm{mcd}(p-1, q) = 1$. La relación de la congruencia anterior ahora se indica como $5 \equiv 2 \pmod{p}$, implica que $p = 3$, una contradicción.

Por lo tanto $p = 3$. Si $q > 3$, observamos, q debe dividir a $5^p - 2^p = 5^3 - 2^3 = 9 \cdot 13$, entonces $q = 13$, conduciendo a la solución $(p, q) = (3, 13)$.

Solución 6

Demostraremos que la condición necesaria y suficiente es que el mcd $(x, y) = 2^s$ para cualquier entero no negativo s. De hecho, puesto que mcd (x, y) = mcd $(p, q - p)$, vemos que el número de divisores comunes impares es invariante bajo dos transformaciones. Si este número es inicialmente 1, sigue siendo igual, y así que el divisor común más grande de x, y puede ser solamente una potencia de 2.

Es suficiente, suponer mcd $(x, y) = 2^s$. De las parejas (p, q) que pueden llegar a (x, y), la que minimiza a $p + q$. Ni p ni q pueden ser pares, pues uno de $(p/2, q)$ o $(p, q/2)$ contradice la minimalidad.

Si $p > q$, entonces (p, q) se obtiene de $\left(\frac{p+q}{2}, q\right)$, otra vez una contradicción.

Similarmente, $p < q$ es imposible. Por lo tanto $p = q$, pero mcd (p, q) es una potencia de 2, y ni p ni q son pares. Por lo anterior, concluimos que $p = q = 1$, y entonces (x, y) es factible empezando de $(1, 1)$.