VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Córdoba, Argentina
22 y 23 de septiembre de 1991

Problema 1

A cada vértice de un cubo se asigna el valor de +1 o -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a cada vértice. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Solución

Para una asignación dada, cambiemos el número de uno de los vértices y veamos cómo afecta esta operación a la suma S de los 14números:

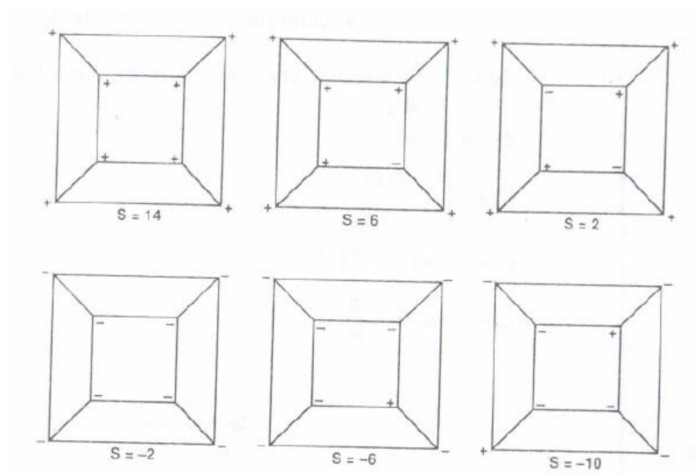
Al cambiar el número de un vértice se modifican 4 valores, el vértice que se cambió y las tres caras que comparten dicho vértice, α_1, α_2, α_3, α_4

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, la nueva suma S' es $S \pm 8$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ y $\alpha_1 = -\alpha_4$, la nueva suma S' es $S \pm 4$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 = \alpha_4 = -\alpha_1$, la nueva suma S' es S

Como toda asignación puede obtenerse a partir de una dada mediante sucesivos cambios en un vértice y $-14 \leq S \leq 14$, los valores posibles de S son 14, 10, 6, 2, – 2, – 6, – 10 y – 14.



No se puede obtener – 14 pues no se puede lograr que los 14 números sean negativos, ya que si los 8 vértices son negativos las caras son positivas.

No se puede obtener 10 pues para ello debe haber 12 positivos y 2 negativos. Con un vértice negativo, S = 6 y con dos vértices negativos hay además dos caras (por lo menos) negativas, que son las que tienen a uno de los vértices pero no al otro.

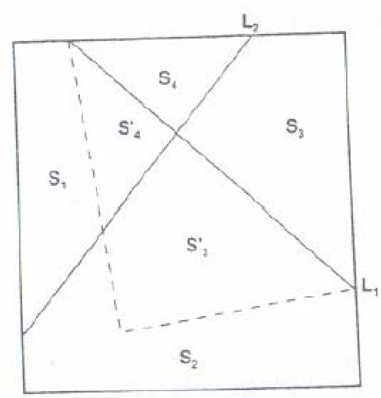
Problema 2

Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una área igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es cuatro.

Solución

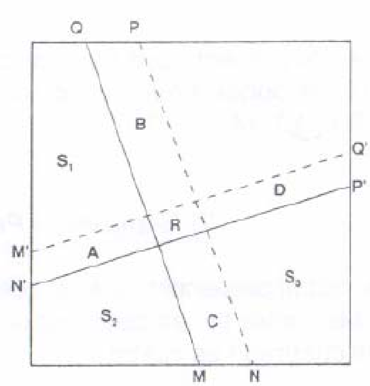
Si las dos rectas se cortan en el centro del cuadrado, lo dividen en cuatro regiones iguales y el área del cuadrado es cuatro.

Si una de las rectas forma un triángulo con dos de los lados



reflejando las regiones S_3 y S_4 según la recta L_1 obtenemos regiones $S_3^{'}$ y $S_4^{'}$,estrictamente contenidas en S_2 y S_1, respectivamente, salvo que L_1 sea una diagonal; en este caso L_2 debe ser la otra diagonal, y el área es 4.

Queda por analizar el siguiente caso



donde se han trazado los segmentos *M'Q'* y *PN* por el centro del cuadrado y paralelos a *N'P'* y QM respectivamente. R es un rectángulo y *A, B, C, D* son trapecios. Supongamos que S_1, S_2, S_3 tienen área I y sea *s* el área del cuadrado. Las áreas de S_1, S_2, S_3 pueden expresarse respectivamente:

$$\begin{cases} 1 = \frac{S}{4} - b + a \\ 1 = \frac{S}{4} - a - c - r \\ 1 = \frac{S}{4} - d + c \end{cases}$$

donde *a, b, c, d* y *r* son las áreas de las regiones *A, B, C, D* y *R*, y *S* es el área del cuadrado (ver figura)

Luego $a - b = c - d$, o sea $a + d = b + c$, de donde $a + d + r = b + c + r$.

Esto significa que los paralelogramos *MNPQ* y *M'N'P'Q'* tienen la misma área y como ambos tienen la misma altura sus bases son iguales, es decir $MN = M'N'$. Resulta que R es un cuadrado y consecuentemente $b = d$ y $a = c$. Igualando las dos primeras ecuaciones del sistema se tiene que $2a + r = b - a$ de donde $2a + a + r = b$. Pero $a + r = b$. Luego $a = 0$ en consecuencia $a = b = c = d = 0$ y las rectas dadas pasan por el centro.

Como observamos al principio, el área del cuadrado es 4.

Problema 3

Sea f una función creciente definida para todo número real x, $0 \le x \le 1$, tal que:

a. $f(0) = 0$
b. $f(x/3) = f(x)/2$
c. $f(1 - x) = 1 - f(x)$

Encontrar $f(18/1991)$

Solución

Probemos que $F\left(\frac{18}{1991}\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}$

a) $F(1) = F(1 - 0) = 1 - F(0) = 1$

b) $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{F(1)}{2} = \frac{1}{2}$ y por inducción $F\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2^n}$ para todo $n \ge 1$.

c) $F\left(\frac{2}{3}\right) = F\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Como F es creciente resulta

$$F(x) = \frac{1}{2} \nabla\ x \notin \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

d) $F\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{F\left(\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{1}{4}$

Luego, $F(x) = \frac{1}{4} \nabla\ x \notin \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$

Así mismo, $F\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{3}{4}$ y $F\left(\frac{7}{9}\right) = F\left(1 - \frac{2}{9}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de donde sigue $F(x) = \frac{3}{4}$, ∇ $x \notin \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$

Por inducción se puede ver que $F(x)$ es constante en cada tercio medio que resulta al subdividir el intervalo [0,1].

e) $\quad \dfrac{2}{3^5}+\dfrac{1}{3^7}<\dfrac{18}{1991}<\dfrac{2}{3^5}+\dfrac{2}{3^7}$

f) $\quad$ Veamos ahora que $F(x)$ es constante en $\left(\dfrac{2}{3^5}+\dfrac{1}{3^7},\dfrac{2}{3^5}+\dfrac{2}{3^7}\right)$, tenemos

$$F\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^7}\right)=F\left(\frac{1}{3^4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^3}\right)\right)=\frac{F\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^3}\right)}{2^4}=\frac{F\left(\frac{19}{3^3}\right)}{2^4}=\frac{F\left(1-\frac{8}{3^3}\right)}{2^4}=$$

$$\frac{1}{2^4}F\left(1-F\left(\frac{8}{3^3}\right)\right)=\frac{1}{2^4}\left(1-\frac{F\left(\frac{8}{9}\right)}{2}\right)=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{2^5}-\frac{1}{2^5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}$$

Falta ver también $F\left(\dfrac{2}{3^5}+\dfrac{2}{3^7}\right)=\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^7}$

Tenemos entonces

$$F\left(\frac{2}{3^5}+\frac{2}{3^7}\right)=\frac{1}{2^4}F\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}\right)=\frac{1}{2^4}F\left(\frac{20}{3^3}\right)=\frac{1}{2^4}F\left(1-\frac{7}{3^3}\right)=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}F\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}$$

Problema 4

Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con cinco cifras de N.

Solución

El número buscado $N = abcde$ habrá de ser igual a la suma $abc + abd + \dots + cde$; esta suma tendrá $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ sumandos; como primera cifra de los sumandos aparecerá igual número de veces las cinco cifras a, b, c, d y e, es decir habrá $\frac{60}{5} = 12$ sumandos cuya primera cifra es a, 12 sumandos cuya primera cifra es b, etc. Igual ocurrirá con las segundas y terceras cifras de los sumandos, de modo que se tendrá

$$N = (100a + 10b + c) + (100a + 10b + d) + \dots + (100c + 10d + e) =$$

$$N = (1200a + 120a + 12a) + (1200b + 120b + 12b) + \dots + (1200e + 120e + 12e) =$$

$$N = (1200 + 120 + 12)(a + b + c + d + e) = 12 \cdot 111\,(a + b + c + d + e)$$

Llamando $S = a + b + c + d + e$ resultará $N = 12 \cdot 111 \cdot S$

S será máximo cuando las cifras de N sean 9, 8, 7, 6, 5; entonces $S = 35$.

S será mínimo cuando las cifras de N sean 1, 2, 3, 4, 5; entonces $S = 15$.

Luego, S debe estar comprendido entre 15 y 35; pero la igualdad (1) nos dice que N debe ser múltiplo de 9, ya que tanto 12 como 111 son divisibles por 3. Por lo tanto, también debe ser múltiplo de 9 la suma S de las cifras de N. Ahora bien, los únicos múltiplos de 9 comprendidos entre 15 y 35 son 18 y 27. Para $S = 18$ resulta $N = 23976$, solución no válida pues tiene $S = 27 \neq 18$. Para $S = 27$ resulta $N = 35961$, que es la solución buscada pues $S = 27$.

VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Córdoba, Argentina
22 y 23 de septiembre de 1991

Problema 5

Sea $P(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2$. Diremos que un número entero a es un valor de P si existen números enteros b y c tales que $a = P(b, c)$.

i. Determinar cuántos elementos de {1, 2, 3, ... ,100} son valores de P.
ii. Probar que el producto de valores de P es un valor de P.

Solución

Los valores de P son los enteros que pueden expresarse como suma de los cuadrados de dos enteros. Observemos en primer lugar que $P(x, y)$ puede expresarse en la forma

$$P(x, y) = (x - y)^2 + (x - 2y)^2$$

con lo cual los valores de P son sumas de dos cuadrados. Por otra parte, si $A = B^2 + C^2$, resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= B \\ x - 2y &= C \end{aligned}$$

resulta $P\,(2B - C, B - C) = A$, lo cual prueba nuestra afirmación. La cuestión i) se resuelve contando los elementos de {1, 2, ..., 100} que son sumas de dos cuadrados. Hay exactamente 43 elementos con la citada propiedad y constituyen el conjunto

{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 8, 13, 20, 29, 40, 53, 68, 85, 18, 34, 45, 58, 73, 32, 41, 52, 80, 50, 61, 74, 89, 72, 85, 98}

Para la segunda cuestión suponemos que A y A' son valores de P. Por lo dicho previamente, podemos expresar A y A' en la forma

$$A = B^2 + C^2, \qquad A' = B'^2 + C'^2$$

Efectuando el producto se tiene:

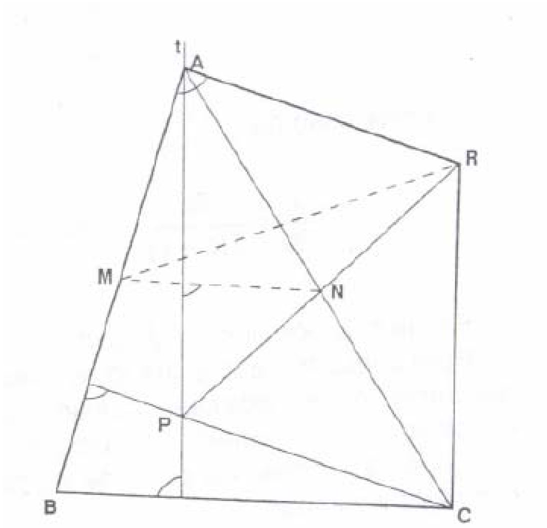
$$AA' = (B' + C')(B'^2 + C'^2) = (BB' - CC')^2 + (BC' + B'C)^2$$

Lo cual completa la demostración.

Problema 6

Dados 3 puntos no alineados M, N y P, sabemos que M y N son puntos medios de dos lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.

Solución



Si P es el ortocentro del triángulo ABC, consideramos el paralelogramo $APCR$. Como N es el punto medio de PR, entonces el punto R puede ser construido.

Trazamos entonces la recta t que contiene a P y es perpendicular a MN. Esta recta pasa por el vértice A. Como PC es perpendicular a AB y RA es paralelo a PC, entonces RA es perpendicular a AB. El vértice A es un punto de intersección de la recta t con la circunferencia de diámetro MR.

Si t corta al segmento MN hay siempre dos soluciones.

Si t no corta al segmento MN pueden existir dos soluciones, una solución o ninguna solución.