V Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Valladolid, España
23 y 24 de septiembre de 1990

Problema 1

Sea f una función, definida en el conjunto de los enteros mayores o iguales que cero, que verifica las dos condiciones siguientes:

i. Si $n = 2^j - 1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $f(n) = 0$
ii. Si $n \neq 2^j - 1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $f(n+1) = f(n) - 1$.

a. Demostrar que para todo entero n, mayor o igual que cero, existe un entero k, mayor que cero, tal que: $f(n) + n = 2^k - 1$.
b. Calcular $f(2^{1990})$.

Solución

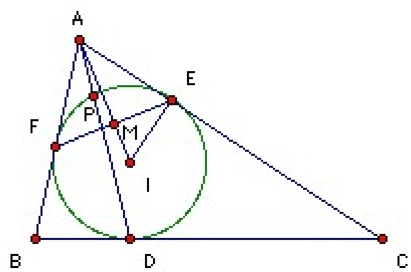
Suponemos que $2^m \leq n < 2^{m+1}$, entonces $f(n) = 2^{m+1} - n - 1$. Sustituimos $r = 2^{m+1} - n$. Entonces realizamos inducción sobre r. Por lo tanto $f(2^{1990}) = 2^{1990} - 1$.

Problema 2

En un triángulo ABC, sean I el centro de la circunferencia inscrita y D, E y F sus puntos de tangencia con los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de la recta AD con la circunferencia inscrita.

Si M es el punto medio de EF, demostrar que los cuatro puntos P, I, M y D pertenecen a una misma circunferencia.

Solución



$\angle AEI = \angle AME = 90^o$, por lo tanto AEI y AME son semejantes. Entonces $\dfrac{AM}{AE} = \dfrac{AE}{AI}$ o $AM{\cdot}AI$ = AE^2, donde AE es tangente al incirculo, por lo tanto $AE^2 = AP{\cdot}AD$. Entonces $AM{\cdot}AI = AP{\cdot}AD$, entonces si P, M, I, D no son colineales, entonces es cíclico.

V Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Valladolid, España
23 y 24 de septiembre de 1990

Problema 3

Sea $f(x) = (x + b)^2 – c$, un polinomio con b y c números enteros.

a. Si p es un número primo tal que p divide a c y p^2 no divide a c, demostrar que, cuaslquiera que sea el número entero n, p^2 no divide a $f(n)$.
b. Sea q un número primo, distinto de 2, que divide a c. Si q divide a $f(n)$ para algún número entero n, demostrar que para cada entero positivo r existe un número entero n' tal que q^r divide a $f(n')$.

Solución

La primera parte es trivial. Si p no divide a $(x + b)$, entonces tampoco divide a $(x + b)^2$, entonces no divide a $(x + b)^2 + c$. De otra manera, si p divide a $x + b$, entonces p^2 divide $(x + b)^2$, por lo tanto p^2 no divide a $(x + b)^2 + c$.

Para la segunda parte, usamos inducción sobre r. Para $r = 1$, tenemos que q divide a $f(n)$. Ahora suponemos que q^r divide a $f(N)$ para cualquier N. Ahora, si q^{r+1} divide a $f(N)$, entonces hemos terminado. Por lo tanto, suponemos que q^{r+1} no divide a $f(N)$, por lo tanto $f(N) = q^r h$ donde q no divide a h.

Tenemos $f(N + kq^r) = f(N) + q^r(2N + 2b)k = q^r h + q^r(2N + 2b)k$. Ahora q divide a $(N + b)^2 + c$, y no divide a c, por lo que no divide a $(N + b)^2$ y entonces no divid a $N + b$. Es impar, por lo tanto no divide a $2N + 2b$. Por lo tanto podemos encontrar un k de manera que $k(2N + 2b) = – h \pmod q$. Entonces tenemos que q^{r+1} divide a $f(N + kq^r)$, con lo cual se completa la inducción.

V Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Valladolid, España
23 y 24 de septiembre de 1990

Problema 4

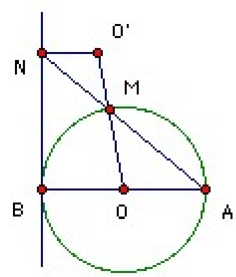
Sean: C_1 una circunferencia, AB uno de sus diámetros, *t* su tangente en B y M un punto de C_1 distinto de A. Se construye una circunferencia C_2 tangente a C_1 en M y a la recta *t*.

a. Determinar el punto P de tangencia de *t* y C_2 y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias al variar M.
b. Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias C_2.

NOTA: Dos circunferencias son ortogonales si se cortan y las tangentes respectivas en los puntos de intersección son perpendiculares.

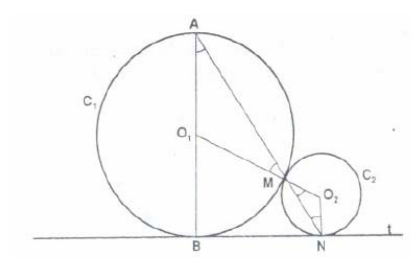
Solución

a) Sean C_2 y q los centros de C, y C_2 respectivamente; R el radio de C_l, x el radio de C_2, y d una recta paralela a t que dista R de t y tal que d y C, estén en lados opuestos de t (ver figura).



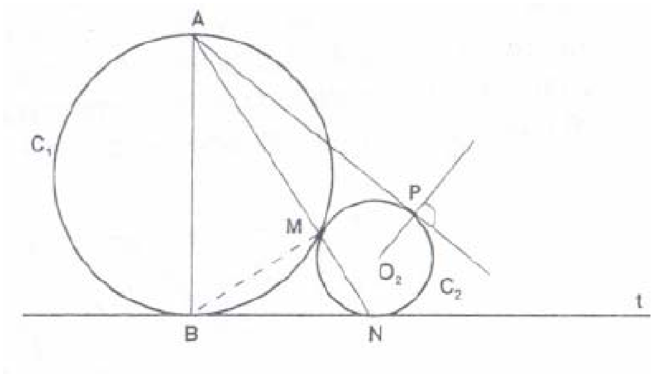
Tracemos O_2D perpendicular a d. Como $O_2O_1, = O_2D = R + x$, el lugar geométrico de O_2 es la parábola de foco O_1 y directriz d.

b) Sea N el punto de tangencia de C_2 con t. Vamos a probar que A, N y M son colineales. Para esto, tracemos los segmentos MA y MN.



Como AB y O_2N son paralelas, entonces $\angle AO_1M = \angle MO_2N = \theta$. En los triángulos isósceles AO_1M y MO_2N, tenemos $\angle O_1MA = \frac{180-\theta}{2} = \angle O_2MN$, lo que prueba que A, M y N son colineales.

Sea AP una tangente a C2 como en la siguiente figura.



Utilizando el concepto de potencia de un punto A en relación a C_2, y observando que $\angle$BMA es recto, tenemos $AP^2 = AM \cdot AN = AB^2$.

Si $AP = AB = 2R$, la circunferencia de centro A y radio $2R$ es ortogonal a C_2 (cualquiera que sea C_2).

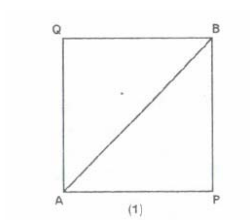
Problema 5

Sean A y B vértices opuestos de un tablero cuadriculado de n por n casillas ($n \geq 1$), a cada una de las cuales se añade su diagonal de dirección AB, formándose así $2n^2$ triángulos iguales. Se mueven una ficha recorriendo un camino que va desde A hasta B formado por segmentos del tablero, y se coloca, cada vez que se recorre, una semilla en cada uno de los triángulos que admite ese segmento como lado. El camino se recorre de tal forma que no se pasa por ningún segmento más de una vez, y se observa, después de recorrido, que hay exactamente dos semillas en cada uno de los $2n^2$ triángulos del tablero. ¿Para qué valores de n es posible esta situación?

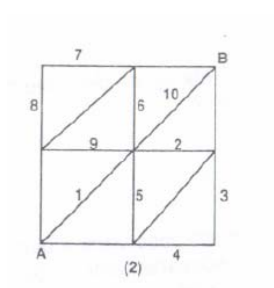
Solución

Primero observamos que como cada triángulo debe tener dos semillas necesariamente se debe pasar por sólo dos lados de cada triángulo. Además, cualquier vértice distinto de A y de B debe pertenecer a una cantidad par de aristas del camino, puesto que, por no ser puntos terminales, cada vez que se llega se tiene que salir. Por el contrario, los vértices A y B pertenecen a un número impar de aristas del camino.

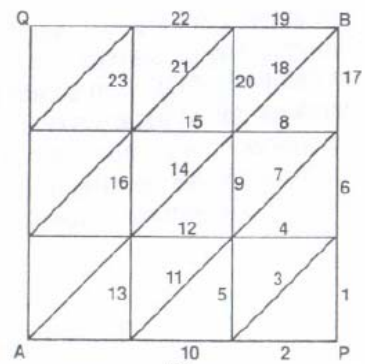
Para el caso en que $n = 1$, sean P y O los otros vértices del cuadrado. Para que haya 2 semillas en AQB y 2 semillas en APB, por lo menos un cateto de AQB y un cateto de APB deben pertenecer al camino. Entonces deben estar los dos catetos de los dos triángulos porque P y Q pertenecen a un número par de aristas del camino; y no puede estar la diagonal AB porque ya hay 2 semillas en cada triángulo. En consecuencia, el vértice A pertenece a dos aristas del camino. Contradicción.



Si $n = 2$, una solución es la secuencia de aristas de 1 a 10 como se muestra en la figura 2.



Para el caso $n = 3$, llamamos P y Q a los otros dos vértices extremos del tablero, numeramos las aristas como se indica en la figura 3 y hacemos el siguiente análisis.



(3)

i) Como p no es un punto Terminal debemos pasar por las aristas 1 y 2.

ii) Como en cada triángulo no se pueden utilizar más de dos aristas, no se usa la arista 3 y por lo tanto se deben usar la 4 y la 5.

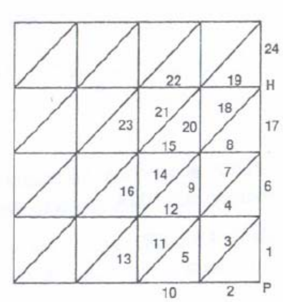
iii) Por paridad, no se pueden utilizar ni la 10, ni la 6, lo cual obliga a usar la 11 y la 7.

iv) Por paridad, las aristas 12 y 9, o están ambas en el camino o no está ninguna. Para que haya 2 semillas en el triángulo del que son lados, deben estar ambas en el camino, lo cual obliga a que la 14 y la 8 no se utilicen.

v) Como 8 no se usa, estamos obligados a usar 18 y 17.

vi) Un razonamiento análogo al que se hizo en iv) obliga a utilizar las aristas 20 y 15 y a no pasar por la 19, con lo cual el vértice B no puede ser un punto terminal, pues hay exactamente 2 aristas del camino que inciden en él. Con esto, el caso $n = 3$ no es posible.

Para $n \geq 4$, utilizando la misma notación que en el caso 3, pero llamando H a lo que era el vértice B, como el 19 no se usó se debe utilizar 24 (ver figura 4). Así, el vértice H no es terminal y sin embargo hay un número impar de aristas del camino que inciden en él. Con esto se ve que el caso $n \geq 4$ tampoco es posible.



En conclusión, el único caso posible es $n = 2$.

Problema 6

Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si el gráfico de f es tangente al eje x, entonces $f(x)$ tiene sus 3 raíces racionales.

Solución

Sea Q el conjunto de los números racionales. Decir que el gráfico de f es tangente al eje X equivale a decir que f tiene una raíz real, doble. Si β es la otra raíz, podemos escribir $f(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)$.

Como a es el coeficiente de x^3 entonces $a \in \mathrm{Q} - \{0\}$.

Así, $(x-\alpha)^2(x-\beta) = x^3 - (2\alpha + \beta)\,x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)\,x - \alpha^2\beta$ tiene coeficientes racionales y por lo tanto

$$2\alpha + \beta \in \mathrm{Q} \qquad \alpha^2 + 2\alpha\beta \in \mathrm{Q} \qquad \alpha^2\beta \in \mathrm{Q}$$

Por otro lado, sabemos que en el polinomio $\mathrm{P}(x) = x^3 + b\mathrm{x}^2 + c\mathrm{x}^2 + d$ con b, c y d racionales, la sustitución de x por $x - \frac{b}{3}$ es una traslación que elimina el término de 2º grado. Como $\frac{b}{3}$ es racional, las raíces racionales corresponden a raíces racionales, y las raíces irracionales corresponden a raíces irracionales.

Por esto, no se pierde generalidad si consideramos $2\alpha + \beta = 0$. De ahí, $\beta = -2\alpha$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 2\alpha\beta \in \mathrm{Q} &\Rightarrow \alpha^2 \in \mathrm{Q} \\ \alpha^2\beta \in \mathrm{Q} &\Rightarrow \alpha^3 \in \mathrm{Q} \end{aligned}$$

De esto se deduce inmediatamente que $\alpha \in \mathrm{Q}$ y $\beta \in \mathrm{Q}$.