IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática

La Habana, Cuba
9 y 10 de abril de 1989

Problema 1

Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + y + z = -1$$
$$x^2 - k^2 + z^2 = 1$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1$$

Solución

Respuesta: $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ or $(-1, -1, -1)$.

De la primera ecuación $x = z - y - 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos

$$2z^2 - 2yz + 2y - 2z = 0, \qquad \Rightarrow \qquad (z - 1)(z - y) = 0.$$

De donde $z = 1$ o $y = z$. Si $z = 1$, entonces de la primera ecuación, tenemos $x + y = 0$, y al sustituir en la última ecuación, $x = 1$, $y = -1$. Si $y = z$, entonces $x = -1$, y de la última ecuación $y = z = -1$.

IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática

La Habana, Cuba
9 y 10 de abril de 1989

Problema 2

Sean x, y, z tres números reales tales que $0 < x < y < z < (\pi/2)$. Demostrar la desigualdad:

$$(\pi/2) + 2\text{sen}(x).\cos(y) + 2\text{sen}(y).\cos(z) \ \text{sen}(2x) + \text{sen}(2y) + \text{sen}(2z)$$

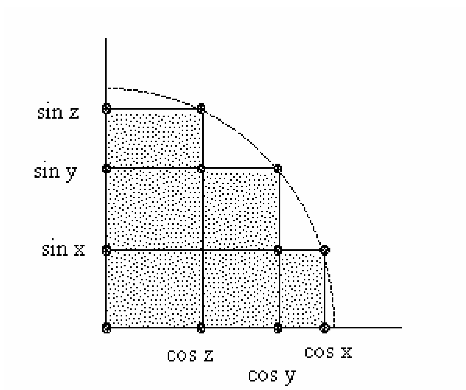
Solución

Tenemos

$$Sen2x + Sen2y + Sen2z - 2SenxCosy = 2(Senx)(Cosx - Cosy) + 2(Seny)(Cosy - Cosz) + 2SenzCosz$$

Por lo tanto, deseamos demostrar que

$$(Senx)(Cosx - Cosy) + (Seny)(Cosy - Cosz) + SenzCosz < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$



De lo anterior tenemos que considerar 6 casos:

Caso (1)	$x \le y \le z$	Caso (2)	$x \le z \le y$
Canso (3)	$y \le x \le z$	Caso (4)	$y \le z \le x$
Caso (5)	$z \le x \le y$	Caso (6)	$z \le y \le x$

El primer caso es obvio del diagrama, porque el lado izquierdo representa el área sombreada, y el lado derecho representa el círculo cuarto entero.

En los casos (2) y (5) el segundo termino es negativo, y $-\,Sen\ y < -\,Sen\ x$, por lo tanto la suma de los primeros dos términos es menor a

$$Sen\ x\ (Cos\ x - Cos\ y) + Sen\ x\ (Cos\ y - Cos\ z) = Sen\ x\ (Cos\ x - Cos\ z)$$

Pero por el mismo argumento que el primer caso los dos rectángulos representados por *Sen x* (*Cos x* – *Cos z*) y *Sen z Cos z* son disjuntos e inciden en el cuarto circulo. Por lo tanto, quedan probados los casos (2) y (5).

En los casos (3) y (4), el primer término es negativo. Los dos términos restantes representan rectángulos disjuntos que no se encuentran dentro del cuarto círculo, por lo tanto otra vez se cumple la desigualdad.

En el caso (6) los primeros dos términos son negativos. El último término es $\frac{1}{2}Sen 2z \le \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, por lo tanto otra vez se cumple la desigualdad.

Problema 3

Sean *a, b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}<\frac{1}{16}$$

Solución

Suponemos $f(a,b,c)=\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}$. Sean *A, B, C* las permutaciones de *a, b, c*, con $A \le B \le C$. Si (*A, B, C*) = (*b, a, c*), (*a, c, b*) o (*c, b, a*), entonces *f(a, b, c)* = *X*, donde $X=\dfrac{B-A}{B+A}+\dfrac{C-B}{C+B}-\dfrac{C-A}{C+A}$. Si (*A, B, C*) = (*a, b, c*), (*b, c, a*) o (*c, a, b*), entonces *f(a, b, c)* = – *X*.

Ahora suponemos *B* = *A* + *h*, *C* = *B* + *k* = *A* + *h* + *k*, donde *h*, $k \ge 0$. Sean *A, B, C* los lados de un triángulo, entonces tenemos *A* + *B* > *C* o *A* > *K*. Por lo tanto

$$X=\frac{h}{2A+h}+\frac{k}{2A+2h+k}-\frac{h+k}{2A+h+k}=\frac{hk(h+k)}{(2A+h)(2A+h+k)(2A+2h+k)}$$

Esto es obviamente no negativo. Tenemos también que es $<\dfrac{1}{20}$. Eso es equivalente a:

$$20h^2k+20hk^2<(2A+h)(2A+h+k)(2A+2h+k)$$

Puesto que *k* < *A* es suficientes demostrar que

$$20h^2k+20hk^2<(2k+h)(2k+h+k)(2k+2h+k)=18k^3+27hk^2+13h^2k+2h^3$$

$$=18k^3+27hk^2+13h^2k+2h^3 \qquad \text{o} \qquad =18k^3+7hk^2-7h^2k+2h^3 \ge 0$$

Pero $7k^2 - 7hk + 2h^2 = 7\left(k - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4} \geq 0$ y h, k son no negativos, por lo tanto $18k^3 + h(7k^2 - 7hk + 2h^2) \geq 0$.

Así hemos establecido que $0 \leq X < \frac{1}{20}$, que demuestra que $f\,(a,\ b,\ c) < \frac{1}{20}$, que es levemente más fuerte que el resultado requerido.

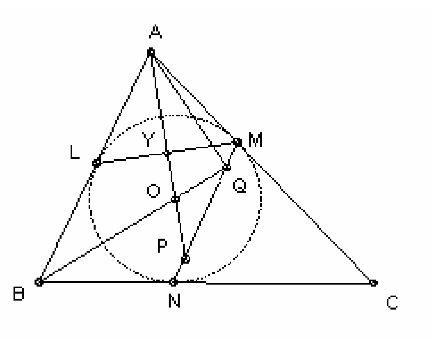
Problema 4

La circunferencia inscrita en el triángulo *ABC*, es tangente a los lados *AB* y *AC* en los puntos *M* y *N*, respectivamente. Las bisectrices de *A* y *B* intersecan a *MN* en los puntos *P* y *Q*, respectivamente. Sea *O* el incentro del triángulo *ABC*.

Probar que:

$$MP \cdot OA = BC \cdot OQ$$

Solución



El inicio consiste en notar que el $\angle AQB = 90^{\circ}$.

$\angle BAQ = 90^{\circ} - \frac{B}{2}$, entonces $\angle OAQ = 90^{\circ} - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = \frac{C}{2}$. Por lo que $OQ = AO\ Sen\ \frac{C}{2}$. Así solo tenemos que demostrar que $MP = BC\ Sen\ \frac{C}{2}$.

Sea *L* el punto donde el incirculo toca a *AB* y sea *Y* el punto medio de *ML* (también la intersección de *ML* con *AO*). $\angle NMC = 90^{\circ} - \frac{C}{2}$. Por lo tanto $\angle MPY = 90^{\circ} - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$. Entonces $MP = \frac{MY}{Sen\left(\frac{B}{2}\right)}$. Tenemos entonces que $MY = MO\ Sen\ MOA = r\ Cos\ \frac{A}{2}$ (donde *r* es el inradio).

Por lo tanto $MP = \dfrac{rCos\left(\frac{A}{2}\right)}{Sen\left(\frac{B}{2}\right)}$. Teniéndose entonces $BC = BN + NC = r\left(Cot\,\frac{B}{2} + Cot\,\frac{C}{2}\right)$, por lo tanto, $\dfrac{MP}{BC} = \dfrac{Cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\left(Sen\left(\frac{B}{2}\right)\right)\left[Cot\left(\frac{B}{2}\right) + Cot\left(\frac{C}{2}\right)\right]}$.

Entonces $\dfrac{MP}{BC \cdot Sen\left(\frac{C}{2}\right)} = \dfrac{Cos\left(\frac{A}{2}\right)}{Cos\left(\frac{B}{2}\right)Sen\left(\frac{C}{2}\right) + Sen\left(\frac{B}{2}\right)Cos\left(\frac{C}{2}\right)} = \dfrac{Cos\left(\frac{A}{2}\right)}{Sen\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)} = 1$.

IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática

La Habana, Cuba
9 y 10 de abril de 1989

Problema 5

Sea la función f definida sobre el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$

i. $f(1)=1$
ii. $f(2n+1)=f(2n)+1$
iii. $f(2n)=3f(n)$

Determinar el conjunto de valores que toma f.

Solución

Debemos obtener *f (n)*, escribimos n en base 2 y después la leemos en base 3.

Por ejemplo 12 = 11002, por lo tanto f (12) = 11003 = 36.

Ahora $g(n)$ se define de esta manera. Entonces ciertamente $g(1) = 1$. Ahora $2n+1$ tiene la misma expansión binaria que $2n$ a excepción de un 1 final, por tanto $g(2n+1) = g(2n) + 1$. Similarmente, $2n$ tiene la misma expansión binaria que n con la adición de un cero final. Por lo tanto $g(2n) = 3\,g(n)$. Por tanto g es por tanto igual que f. por lo tanto el conjunto de todo los m tales que $m = f(n)$ para una cierta n es el conjunto de todos los m que se puede escribir en la base 3 sin un dígito 2.

Problema 6

Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación:

$$2x^2 - 3x = 3y^2$$

Solución

Escribimos $A = a - 1$ y la ecuación se convierte en $A\,(2A + 1) = b\,(3b + 1)$. Sea d máximo común divisor de A y B. Entonces $A = d{\cdot}x$, $b = d{\cdot}y$. Entonces $x\,(2d{\cdot}x + 1) = y\,(3d{\cdot}y + 1)$. Como x y y es coprimos, x debe dividirse $(3d{\cdot}y + 1)$. Por tanto, escribimos $3d{\cdot}y + 1 = n{\cdot}x$. Entonces $2d{\cdot}x + 1 = n{\cdot}y$. Solucionando para x y y en términos de n y d tenemos $x = \dfrac{n+3d}{n^2-6d^2}$, $y = \dfrac{n+2d}{n^2-6d^2}$.

Por lo tanto podremos demostrar que hay muchas soluciones para $n^2 - 6d^2 = 1$. No es difícil encontrar las primeros: $1^2 - 6{\cdot}0^2 = 1$, $5^2 - 6{\cdot}2^2 = 1$, $49^2 - 6{\cdot}20^2 = 1$. Notamos que $49^2 = 2{\cdot}5^2 - 1$, así que nos preguntamos si $n = 2{\cdot}49^2 - 1$ puede ser otra solución, de hecho damos $d = 1960 = 2{\cdot}49{\cdot}20$. Esto sugiere que intentemos $(2n^2 - 1)^2 - 6(2n{\cdot}d)^2 = 4n^4 - 4n^2 + 1 - 24n^2d^2 = 4n^2\,(n^2 - 6d^2 - 1) + 1 = 1$. Por lo tanto hay infinitas soluciones para $n^2 - 6d^2 = 1$ y hemos concluido.