III Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Lima, Perú
25 y 26 de abril de 1988

Problema 1

Las medidas de los lados de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas del mismo triángulo también están en progresión aritmética. Demuestre que el triángulo es equilátero.

Solución

Sean los lados del triángulo *a, a+d, a+2d* con $d \geq 0$. Entonces las alturas son

$$\frac{k}{a} \geq \frac{k}{a+d} \geq \frac{k}{a+2d}$$

donde k es dos veces el área. Ahora tenemos:

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{a+2d} > \frac{2k}{a+d}$$

A menos que $d = 0$. Esto es equivalente a $(a + d)(a + 2d) + a(a + d) > 2a(a + 2d)$ o $2d^2 > 0$, lo cual es obviamente verdad. Las altitudes pueden formar tan solamente una progresión aritmética si d = 0 y por lo tanto el triángulo es equilátero.

Problema 2

Sean a, b, c, d, p y q números naturales no nulos que verifican $ad - bc = 1$, y $\frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}$.

Demostrar que:

I $\quad q \geq b + d$

II $\quad$ Si $q = b + d$ entonces $p = a + c$

Solución

$\frac{p}{q} > \frac{c}{d}$ implica $pd > cq$, entonces $pd \geq cq + 1$, también $\frac{p}{q} \geq \frac{c}{d} + \frac{1}{qd}$. Similarmente, $\frac{a}{b} > \frac{p}{q}$ implica $\frac{a}{b} > \frac{p}{q} + \frac{1}{bq}$. También $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{qd} + \frac{1}{qb} = \frac{b+d}{qbd}$. Pero $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$. Entonces $q \geq b + d$.

Ahora asumimos que $q = b + d$. Tenemos $ad - bc = 1 \leq d$, por lo tanto $ad + cd - d \leq bc + cd$ y de lo anterior tenemos $\frac{a+c-1}{b+d} \leq \frac{c}{d}$. Entonces $p \geq a + c$. Similarmente $ad - bc \leq b$, Ahora bien

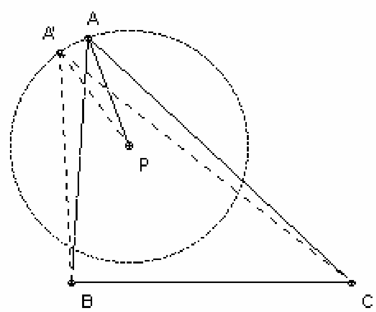
$$bc + b + ab \geq ad + ab, \text{ por lo tanto } \frac{a+c+1}{b+d} \leq \frac{a}{b}.$$

Y $p \leq a + c$. Por lo que $p = a + c$.

Problema 3

Demuestre que entre todos los triángulos cuyos vértices distan 3, 5 y 7, de un punto dado P, el que tiene mayor perímetro admite a P como su incentro.

Solución



Los puntos dados P, B, C y un círculo fijo con centro P, nosotros demuestran que el punto A en el círculo, lo cual maximiza $AB + CA$ es tal que el PA biseca el ángulo BAC. Considerar un punto A' cerca del A. Entonces el cambio en $AB + CA$ y entonces al mover A a A' se tiene que $AA'(Sen\ PAC - Sen\ PAB) + O\ (AA'^2)$. Entonces para una configuración máxima debemos tener $Sen\ PAC = Sen\ PAB$, si no podríamos conseguir una suma más grande tomando A' en el otro lado. Esto se aplica a cada vértice del triángulo, así que P debe ser el incentro.

III Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Lima, Perú
25 y 26 de abril de 1988

Problema 4

Sea ABC un triángulo cuyos lados son $a,\ b,\ c$. Se divide cada lado del triángulo en n segmentos iguales. Sea S la suma de los cuadrados de las distancias de cada vértice a cada uno de los puntos de división del lado opuesto distintos de los vértices.

Demuestre que: $\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$ es un número racional.

Solución

Usando la ley del coseno, $AA_k^2 = AB^2 + \dfrac{k^2 BC^2}{(n+1)^2} - \dfrac{2k \cdot AB \cdot BC}{n+1} CosB$. Por lo tanto

$$\sum AA_k^2 = n \cdot AB^2 + \frac{BC^2}{(n+1)^2(1^2+2^2+3^2+...+n^2)} - \frac{(2 \cdot AB \cdot BC \cdot CosB)(1+2+3+...+n)}{n+1}$$

Semejantemente para los otros dos lados. Así la suma total es:

$$n(AB^2+BC^2+CA^2) + \frac{n(2n+1)}{6(n+1)(AB^2+BC^2+CA^2)} - n(AB \cdot BC \cdot CosB + BC \cdot CA \cdot CosC + CA \cdot AB \cdot CosA)$$

Pero $AB \cdot BC \cdot CosB = \dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2}$ de lo cual tenemos que

$$AB \cdot BC \cdot CosB + BC \cdot CA \cdot CosC + CA \cdot AB \cdot CosA = \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2}$$

Así la suma es múltiplo racional de $\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$.

Problema 5

Considere las expresiones de la forma $x + yt + z\,t^2$ con x, y, z números racionales y $t^3=2$. Demuestre que:

Si $x + yt + z\,t^2 \neq 0$, entonces existen u, v, w racionales tal que:

$$(x + yt + z^2).(u + vt + wt^2) = 1$$

Solución

Tenemos que $xu + 2zv + 2yw = 1$, $yu + xv + 2zw = 0$, $zu + yv + xw = 0$. Los cuales forman justamente un sistema de ecuaciones lineales. Resolviendo tenemos:

$$u = \frac{x^2 - 2yz}{d},\ v = \frac{2z^2 - xy}{d},\ w = \frac{y^2 - xz}{d} \quad \text{donde} \quad d = x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz$$

Esto no sucede para $d = 0$. Pero si $d = 0$, entonces multiplicándose por un número entero conveniente tenemos $6mnr = m^3 + 2n^3 + 4r^3$ para cualquier entero m, n, r. Pero podemos dividir por un factor común de m, n, r para conseguirlos sin cualquier factor común.

Pero $6mnr, 2n^3, 4r^3$ son todos pares, entonces m tiene que ser par. Ahora bien, $m = 2M$. Entonces $12Mnr = 8M^3 + 2n^3 + 4r^3$, también $6Mnr = 4M^3 + n^3 + 2r^3$.

Pero $6Mnr, 4M^3$ y $2r^3$ son todos pares, entonces n tiene que ser par. Ahora bien $n = 2N$. Entonces $12MNr = 4M^3 + 8N^3 + 2r^3$, también $6MNr = 2M^3 + 4N^3 + r^3$, por lo que r también es par. Por lo tanto m, n, r tienen como factor común al 2, lo cual es una contradicción. Por lo tanto d no puede ser cero.

III Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Lima, Perú
25 y 26 de abril de 1988

Problema 6

Considere los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética. Demuestre que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

Solución

Inducción en el N. Para $n = 1$, $\{1\}$ es obviamente máxima. Ahora suponer que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ es el máximo conjunto para n. Se toma a_{n+1} el entero más pequeño $> a_n$ tal que $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ no tiene tres miembros en AP. Ahora se considera la secuencia $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ que no se tienen tres en AP y $b_{n+1} \leq a_{n+1}$. Hay solamente una secuencia finita. Entonces podemos encontrar una que sea máxima. Suponemos que es $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n+1}$. Ahora tomamos cualquier a_i, c_i que se la suma más grande de los inversos. Es claramente máxima con respecto a las secuencias cuyos miembros más grandes son $\leq a_{n+1}$.

Suponemos que tenemos una secuencia $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ sin tres en AP y $x_{n+1} > a_{n+1}$. Entonces tenemos $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}$, por inducción, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, así que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$, que es peor que la secuencia que hemos elegido.