I Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Paipa y Villa de Leyva, Colombia
10 y 11 de diciembre de 1985

Problema 1

Halle todas las ternas de enteros (a, b, c) tales que:

$$a + b + c = 24$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$
$$a \cdot b \cdot c = 440$$

Solución

$$ab + bc + ca = \frac{\left((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\right)}{2} = 183$$

Por lo tanto a, b, c son raíces de la cúbica $x^3 - 24x^2 + 183x - 440 = 0$. Al factorizar la expresión anterior tenemos $(x - 5)(x - 8)(x - 11) = 0$, por lo que la solución son las permutaciones de (5, 8, 11).

I Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Paipa y Villa de Leyva, Colombia
10 y 11 de diciembre de 1985

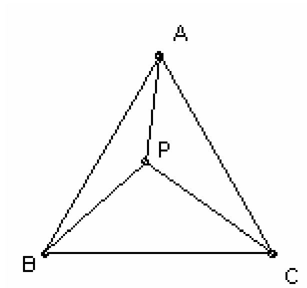
Problema 2

Sea P un punto interior del triángulo equilátero ABC tal que:

$$PA = 5,\ PB = 7,\ \text{y}\ PC = 8$$

Halle la longitud de un lado del triángulo ABC.

Solución



Sea x la longitud del lado. Usando la formula del coseno, tenemos

$$Cos\ APB = \frac{74 - x^2}{70},\ Cos\ APC = \frac{89 - x^2}{80},\ Cos\ BPC = \frac{113 - x^2}{112}.$$

Pero $\quad Cos\ BPC = Cos\ APC\ Cos\ BPC - Sen\ APC\ Sen\ BPC$

Entonces $$\frac{113 - x^2}{112} = \frac{74 - x^2}{70} \cdot \frac{89 - x^2}{80} - \sqrt{\left(1 - \left(\frac{74 - x^2}{70}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{89 - x^2}{80}\right)^2\right)}.$$

Ahora resolvemos el término de la raíz cuadrada. Multiplicamos por 25, 256, 49 y después de simplificar, tenemos $x^6 - 138x^4 + 1161x^2 = 0$. Entonces $x = 0, \pm 3, \pm\sqrt{129}$. Descartamos el cero y las soluciones negativas. $x = 3$ corresponde a un punto P fuera del triángulo. Así que la única solución para un punto P en el interior del triángulo es $x = \sqrt{129}$.

Solución alternativa por Johannes Tang

Rotar el triángulo sobre C a 60°. Dejar P ir a P'. Tenemos $AP' = 7$, $CP' = 8$ y ángulo $PCP' = 60°$, así que $PP'C$ es equilátero. Por lo tanto ángulo $CPP' = 60°$. También $PP' = 8$. Usando la fórmula del coseno en el triángulo APP' encontramos ángulo $APP' = 60°$. Por lo tanto ángulo $APC = 120°$. Ahora aplicando fórmula del coseno al triángulo APC, conseguimos resultado.

Problema 3

Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación:

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0.$$

Sabiendo que son reales, positivos y que:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

Solución

Tenemos que $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{5}{4}$ y entonces $\left(\frac{r_1}{2}\right)\left(\frac{r_2}{4}\right)\left(\frac{r_3}{5}\right)\left(\frac{r_4}{8}\right) = \frac{1}{4^4}$. Pero $\frac{AM}{GM}$ da $\left(\frac{r_1}{2}\right)\left(\frac{r_2}{4}\right)\left(\frac{r_3}{5}\right)\left(\frac{r_4}{8}\right) \leq \left(\frac{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^4}$ con las relaciones de igualdad, entonces tenemos $\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8}$. Por lo tanto se obtiene que $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 1$, $r_3 = \frac{5}{4}$ y $r_4 = 2$.

Problema 4

Si: $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$, y $$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

Demuestre que ambas fracciones son iguales a $x + y + z$.

Solución

Tenemos que:

$$yz - x^2 - y^2 z + yx^2 = xz - y^2 - x^2 z + xy^2$$

Entonces

$$z(y - x - y^2 + x^2) = -y^2 + xy^2 - x^2 y + x^2$$

Por lo tanto

$$z = \frac{x + y - xy}{x + y - 1}$$

Entonces

$$yz = x + y + z - xy - xz$$

$$yz - x^2 = x + y + z - x^2 - xy - xz = (x + y + z)(1 - x)$$

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = x + y + x$$

Problema 5

A cada entero positivo n se asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

i. $f(rs)=f(r)+f(s)$
ii. $f(n)=0$, siempre que la cifra en las unidades n sea 3.
iii. $f(10)$ es cero.

Halle $f(1985)$.Justifique su respuesta.

Solución

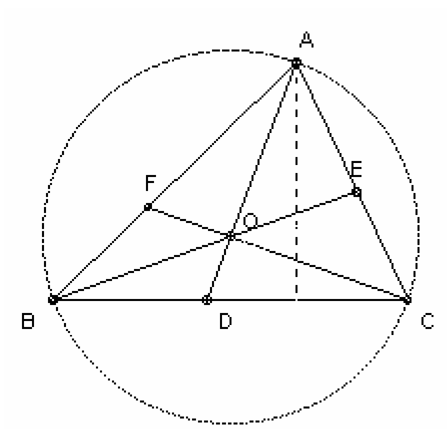
Si $f(mn)=0$, entonces $f(m)+f(n)=0$ (por (1)). Pero $f(m)$ y $f(n)$ no son negativos, entonces $f(m)=f(n)=0$. Implica que $f(10)=0$ lo cual implica que $f(5)=0$. De manera similar tenemos que $f(3573)=0$ por (2), entonces $f(397)=0$. Por lo tanto $f(1985)=f(5)+f(397)=0$.

Problema 6

Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos D, E y F de las rectas BC, AC y AB respectivamente. Si las rectas AD, BE y CF pasan todas por el centro O de la circunferencia al triángulo ABC, cuyo radio es *r*, demuestre que:

$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{r}$$

Solución



Proyectando sobre altitud de A, tenemos

$$AD\ Cos(C-B) = AC\ Sen\ C = 2R\ Sen\ B\ Sen\ C, \text{ entonces } \frac{2R}{AD}=\frac{Cos\,(C-B)}{Sen\ B\ Sen\ C}.$$

Por lo anterior, tenemos que

$$\frac{2R}{AD}+\frac{2R}{BE}+\frac{2R}{CF}=\frac{Cos\,(C-B)}{Sen\ B\ Sen\ C}+\frac{Cos\,(A-C)}{Sen\ C\ Sen\ A}+\frac{Cos\,(C-B)}{Sen\ B\ Sen\ C}$$

Por lo tanto

$$2R\ Sen\ A\ Sen\ B\ Sen\ C\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}\right)=Sen\ A\,Cos(B-C)+Sen\ B\,Cos(C-A)+Sen\ C\ Cos(A-B)$$

$$=3\,Sen\ A\,Sen\ B\,Sen\ C+Sen\ A\,Cos\ B\,Cos\ C+Sen\ B\,Cos\ A\,Cos\ C+Sen\ C\ Cos\ A\,Cos\ B$$

$$=3\,Sen\ A\,Sen\ B\,Sen\ C+Sen\,(A+B)\,Cos\ C+Sen\ C\ Cos\ A\,Cos\ B$$

$$=3\,Sen\ A\,Sen\ B\,Sen\ C+Sen\ C\,(Cos\ C+Cos\ A\,Cos\ B)$$

$$=3\,Sen\ A\,Sen\ B\,Sen\ C+Sen\ C\,(\text{-}Cos\,(A+B)+Cos\ A\,Cos\ B)$$

$$=4\,Sen\ A\,Sen\ B\,Sen\ C, \text{ por lo tanto } \frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$$